

**Anwendung der Theorie
der endlichen Fermionensysteme auf die
inelastische Streuung
von Nukleonen an Ein-Loch-Kernen**

— Berechnungen zur Kernreaktion $^{15}\text{N}(p,n)^{15}\text{O}$ —

Johannes-Heinrich Vogeler

1972

Anwendung der Theorie der endlichen Fermionensysteme auf
die inelastische Streuung von Nukleonen an Ein-Loch-Kernen

-Berechnungen zur Kernreaktion $^{15}\text{N}(p,n)^{15}\text{O}$ -

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Fakultät für Physik

der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Johannes-Heinrich Vogeler

März 1972



1. Berichterstatter: Prof.Süßmann/Dr.Weigel

2. Berichterstatter: Prof.Bopp

Tag der mündlichen Prüfung: 15.12.1972

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die Streuung von Nukleonen an Ein-Loch-Kernen im Rahmen der Theorie der endlichen Fermionensysteme behandelt. Es wird eine Relation zwischen dem Vertex Γ einer Zweiteilchen-Green-Funktion und der Reaktionsamplitude für die Reaktion $(\mu, k) \rightarrow (\nu, k')$ hergestellt; dabei bedeuten μ und ν Anfangs- und Endzustand des Targetkerns und k bzw. k' beschreiben das einfallende bzw. das auslaufende Teilchen. Der Vertex Γ wird näherungsweise aus einer effektiven Teilchen-Loch-Wechselwirkung F berechnet, er setzt sich zusammen aus einem nichtresonanten direkten Anteil und einem Resonanzterm, der die Beiträge der Compound-Zustände enthält. Die Zerfallsbreiten der Compound-Zustände werden näherungsweise berechnet. Es wird eine Partialwellenzerglegung für die Reaktionsamplitude angegeben. Als Anwendung der Theorie wird der totale Wirkungsquerschnitt für die Reaktion $^{15}\text{N}(p, n)^{15}\text{O}$ als Funktion der Einschußenergie E_p des Protons ($3.5 \text{ MeV} \leq E_p \leq 15 \text{ MeV}$) berechnet, wobei als Compound-Zustände die Zustände mit negativer Parität ($0 \leq J \leq 4$, $T = 0, 1$) bei ^{16}O berücksichtigt werden. Die effektive Teilchen-Loch-Wechselwirkung F wird dabei als energieunabhängig vorausgesetzt und Partialwellen bis $l=3$ werden berücksichtigt. Es zeigt sich, daß die Theorie die Lage der Compound-Resonanzen befriedigend wiedergeben kann. Die bei den Resonanzbreiten und dem Untergrund des Wirkungsquerschnittes auftretenden Diskrepanzen deuten jedoch darauf hin, daß die Näherung einer energieunabhängigen Teilchen-Loch-Wechselwirkung aufgegeben werden muß, sobald man das Kontinuum in die Theorie einbezieht.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung.....	1
2. Schalenmodell für Kernreaktionen.....	2
3. Berechnung des Vertex.....	9
4. Die Partialwellenentwicklung der Reaktionsamplitude....	15
5. Zusammenhang zwischen der Schalenmodell-Theorie für Kernreaktionen und der Methode der gekoppelten Kanäle..	33
6. Numerische Durchführung und Ergebnisse.....	35
Anhang A: Green-Funktionen.....	44
Anhang B: Ableitung einiger Gleichungen mit Hilfe der Funktionalmethode.....	48
Anhang C: Theorie der Resonanzbreiten.....	51
Anhang D: Berechnung des Matrixelementes $\langle \ell_{\alpha} j_{\alpha} \ell_{\beta} j_{\beta} J M U^{(\kappa)}(1) \cdot U^{(\kappa)}(2) V^{(\lambda)}(1) \cdot V^{(\lambda)}(2) \ell_{\gamma} j_{\gamma} \ell_{\delta} j_{\delta} J' M' \rangle$, wobei die Tensoren U nur auf die Ortsvariablen und die Tensoren V nur auf die Spinvariablen wirken.....	53
Anhang E: Umkopplungsformel für Clebsch-Gordan- Koeffizienten.....	55
Literaturverzeichnis.....	58

1. Einleitung

Ein charakteristisches Merkmal der Wirkungsquerschnitte für die niederenergetische Streuung von Nukleonen an Atomkernen ist das Auftreten vieler schmaler Resonanzen. Diese Resonanzen lassen sich nicht mehr als Einteilchen-Resonanzen im Rahmen eines phänomenologischen optischen Modells erklären.

N.Bohr¹⁾ hat versucht, diese Phänomene mit seinem Sandsackmodell zu beschreiben. Er geht davon aus, daß der Targetkern das einfallende Teilchen vollkommen absorbiert, wobei ein Compound-Kern gebildet wird, der anschließend unabhängig von seiner Entstehung zerfällt. Da bei der Bildung des Compound-Kerns die Energie des Geschoßteilchens auf viele Nukleonen verteilt wird, erschien es zunächst aussichtslos, solche Kernreaktionen im Rahmen einer mikroskopischen Theorie beschreiben zu wollen. Es sind dann einige formale Theorien für solche Prozesse aufgestellt worden wie die von Breit und Wigner²⁾, Kapur und Peierls³⁾, Wigner und Eisenbud⁴⁾, Humblet und Rosenfeld⁵⁾. Allen diesen Theorien gemeinsam ist die Tatsache, daß sie den Wirkungsquerschnitt bzw. die Streumatrix durch einige phänomenologische Parameter ausdrücken; es sind also "black-box-Theorien".

Der erste Versuch, Kernreaktionen mit einer mikroskopischen Theorie zu beschreiben, geht auf Feshbach⁶⁾ zurück, der die Streumatrix durch Matrixelemente des Hamiltonoperators ausdrückt. In ähnlicher Weise haben Weidenmüller und Mitarbeiter⁷⁾ eine Schalenmodell-Theorie für Kernreaktionen entwickelt, wobei sie eine von Fano⁸⁾ vorgeschlagene Methode zur Behandlung der Restwechselwirkung benutzten.

In dieser Arbeit werden wir den Vorschlägen verschiedener Autoren⁹⁻¹⁴⁾ folgend eine Schalenmodell-Theorie für Kernreaktionen entwickeln, wobei wir die Methode der Green-Funktionen¹⁵⁾ verwenden. Wir wollen uns dabei auf die Streuung von Nukleonen an Ein-Loch-Kernen beschränken.

2. Schalenmodell für Kernreaktionen

Wir wollen die Streuung von Nukleonen an Ein-Loch-Kernen (z.B. ^{15}N , ^{15}O) im Rahmen eines erweiterten Schalenmodells beschreiben. Hierzu nehmen wir an, daß sich der Hamiltonoperator H für den Streuprozeß additiv zusammensetzt aus dem Einteilchenoperator für das Geschoßteilchen $H_p = T_p + V_p$, dem Hamiltonoperator für das Target H_t und einem Wechselwirkungsterm W_{pt} , der die Restwechselwirkung zwischen Target und Geschoßteilchen beschreibt:

$$H = (T_p + V_p) + H_t + W_{pt} =: H_0 + W_{pt} \quad (1)$$

Die bei der Reaktion auftretenden Compound-Zustände sind die angeregten Zustände eines magischen Kernes (z.B. ^{16}O).

Die Streuzustände für ein Teilchen mit dem Impuls $\vec{p} = \hbar \cdot \vec{k}$, das am Targetkern im Zustand μ gestreut wird, ergeben sich aus der Lippmann-Schwinger-Gleichung¹⁶⁾ zu¹⁾

$$|k\mu\rangle^{(\pm)} = a_k^\dagger |\mu\rangle + \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + E_\mu - H \pm i0 \right)^{-1} (V_p + W_{pt}) a_k^\dagger |\mu\rangle, \quad (2)$$

wobei $a_k^\dagger$ der Erzeugungsoperator für ein freies Teilchen mit dem Impuls $\vec{p} = \hbar \cdot \vec{k}$ ist. Hieraus erhält man mit Hilfe der Identität

$$(x \pm i0)^{-1} = P(1/x) \mp i\pi\delta(x) \quad (3)$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} (-) \langle k'v | &= (+) \langle k'v | - 2\pi i \cdot \langle v | a_k (V_p + W_{pt}) \times \\ &\times \delta \left(\frac{\hbar^2 k'^2}{2m'} + E_v - H \right), \end{aligned} \quad (4)$$

so daß sich für die S-Matrix ergibt:

$$\begin{aligned} S_{k'k}^{vu} &:= (-) \langle k'v | k\mu \rangle^{(+)} = \delta_{k'k} \delta_{vu} - 2\pi i \times \\ &\times \delta \left(\frac{\hbar^2 k'^2}{2m'} + E_v - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E_\mu \right) \langle v | a_k (V_p + W_{pt}) | k\mu \rangle^{(+)} \end{aligned} \quad (5)$$

¹⁾ Der Index k umfasst alle Quantenzahlen des Streuteilchens - also auch Spin- und Isospinquantenzahlen.

bzw. für die T-Matrix

$$T_{k'k}^{\nu\mu} = \langle \nu | a_{k'} V_p | k \mu \rangle^{(+)} + \langle \nu | a_{k'} W_{pt} | k \mu \rangle^{(+)} . \quad (6)$$

Um die physikalische Bedeutung der beiden Terme in Gl.(6) besser erkennen zu können, ist es zweckmäßig, die Schalenmodell-Streuzustände^{*)}

$$\begin{aligned} |k \mu \rangle_o^{(\pm)} &:= a_k^\dagger | \mu \rangle + \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + E_\mu - H_o \pm i0 \right)^{-1} V_p a_k^\dagger | \mu \rangle := \\ &:= a_{k(\pm)}^\dagger | \mu \rangle \end{aligned} \quad (7)$$

einzuführen. Damit läßt sich nämlich die Lippmann-Schwinger-Gleichung (2) umformen zu

$$|k \mu \rangle^{(\pm)} = a_{k(\pm)}^\dagger | \mu \rangle + \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + E_\mu - H \pm i0 \right)^{-1} W_{pt} a_{k(\pm)}^\dagger | \mu \rangle \quad (8)$$

und

$$|k \mu \rangle^{(\pm)} = |k \mu \rangle_o^{(\pm)} + \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + E_\mu - H_o \pm i0 \right)^{-1} W_{pt} |k \mu \rangle^{(\pm)} . \quad (9)$$

Setzt man nun Gl.(9) in Gl.(6) ein, so erhält man wegen (7) für die T-Matrix

$$T_{k'k}^{\nu\mu} = \langle \nu | a_{k'} V_p | k \mu \rangle_o^{(+)} + \langle \nu | a_{k'} W_{pt} | k \mu \rangle_o^{(+)} . \quad (10)$$

Die Bedeutung der beiden Terme ist nun klar: der erste Term ist der Ausdruck für die T-Matrix, wie er aus der Theorie der Potentialstreuung bekannt ist, der zweite Term ist eine Korrektur aufgrund der Restwechselwirkung.

Für die Reaktionsamplitude $f_{k'k}^{\nu\mu}$ bedeutet das¹⁷⁾

$$f_{k'k}^{\nu\mu} = - \frac{2m}{4\pi\hbar^2} \left(\langle \nu | a_{k'} V_p | k \mu \rangle_o^{(+)} + \langle \nu | a_{k'} W_{pt} | k \mu \rangle_o^{(+)} \right) . \quad (11)$$

^{*)} Wir nennen diese Zustände Schalenmodell-Streuzustände, weil Gl.(7) die Restwechselwirkung nicht enthält.

Wie man aus Gl.(7) leicht erkennt, liefert die Potentialstreuung nur für $\mu=v$ (d.h. elastische Streuung) einen Beitrag zur Reaktionsamplitude. Wir wollen nun zeigen, wie man den Korrekturterm in Gl.(11) (Teilchen-Loch-Anteil der Reaktionsamplitude) mit Hilfe der Methode der Green-Funktionen berechnen kann.

Der Teilchen-Loch-Anteil der Reaktionsamplitude ist gegeben durch

$$f_{k',k}^{v\mu}(\text{TL}) = - \frac{2m}{4\pi\hbar^2} \begin{pmatrix} - \end{pmatrix}_0 \langle k',v | W_{\text{pt}} | k\mu \rangle \begin{pmatrix} + \end{pmatrix}_0. \quad (12)$$

Das Matrixelement in Gl.(12) ist aber noch insofern unsymmetrisch, als auf der linken Seite ein Schalenmodell-Streuzustand und auf der rechten Seite die exakte Streulösung steht. Wir setzen daher für $|k\mu\rangle \begin{pmatrix} + \end{pmatrix}_0$ die Lippmann-Schwinger-Gleichung

$$\begin{aligned} |k\mu\rangle \begin{pmatrix} + \end{pmatrix}_0 &= i o \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + E_\mu - H + i o \right)^{-1} |k\mu\rangle \begin{pmatrix} + \end{pmatrix}_0 = \\ &= |k\mu\rangle \begin{pmatrix} + \end{pmatrix}_0 + \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + E_\mu - H + i o \right)^{-1} W_{\text{pt}} |k\mu\rangle \begin{pmatrix} + \end{pmatrix}_0 \end{aligned} \quad (13)$$

ein und erhalten dann aus Gl.(12) unter Benutzung der Feldoperatoren (7) die Beziehung

$$\begin{aligned} \langle v | a_{k',(-)} i o \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + E_\mu - H + i o \right)^{-1} a_{k,(+)}^\dagger | \mu \rangle &= s_{k',k} \delta_{v\mu} + \\ + \frac{4\pi\hbar^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k'^2}{2m'} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - (E_v - E_\mu) - i o \right)^{-1} \cdot f_{k',k}^{v\mu}(\text{TL}), \end{aligned} \quad (14)$$

wobei $s_{k',k}$ die Schalenmodell-Streumatrix ist:

$$\begin{pmatrix} - \end{pmatrix}_0 \langle k',v | k\mu \rangle \begin{pmatrix} + \end{pmatrix}_0 =: s_{k',k} \delta_{v\mu}. \quad (15)$$

Die linke Seite steht in engem Zusammenhang mit den Green-Funktionen. Vergleicht man nämlich die Gl.(14) mit Gl.(A.9) aus Anhang A, so ergibt sich unter der Annahme, daß die Targetzustände μ, v keine Kontinuumsbeimischungen enthalten:

$$i o \cdot G_{k'(-)k(+)}^{v\mu} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\hat{w}_{v\mu}}{2} \right) = s_{k'k} \delta_{v\mu} + \frac{4\pi\hbar^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k'^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - (E_v - E_\mu) - i o \right)^{-1} \cdot f_{k'k}^{v\mu}(\text{TL}) \quad (16)$$

mit

$$\epsilon_{v,\mu} := E_0(A) - E_{v,\mu}(A-1) \quad \hat{w}_{v\mu} := \epsilon_v - \epsilon_\mu \quad (17)$$

Man kann sich unter allgemeineren Voraussetzungen von der Bedingung frei machen, daß die Targetzustände keine Kontinuumsbeimischungen enthalten dürfen¹¹⁾; wir wollen aber später die Annahme machen, daß sich die Targetzustände in guter Näherung als Ein-Loch-Zustände im Sinne des Schalenmodells beschreiben lassen; dann ist die Voraussetzung zu Gl.(16) gegeben.

Wir haben somit eine formale Identität zwischen dem Teilchen-Loch-Anteil der Reaktionsamplitude bzw. der Reaktionsamplitude für inelastische Streuung und den Green-Funktionen hergestellt. Für praktische Rechnungen ist Gl.(16) nicht geeignet, da die Berechnung der linken Seite problematisch ist. Wir wollen vielmehr die linke Seite mit einer speziellen Zweiteilchen-Green-Funktion vergleichen, da sich eine Zweiteilchen-Green-Funktion mit Hilfe des Vertex¹⁵⁾ Γ in Einteilchen-Green-Funktionen zerlegen läßt, deren Spektraldarstellung in Schalenmodell-Näherung bekannt ist und für die Berechnung des Vertex aus einer effektiven Teilchen-Loch-Wechselwirkung bereits ausgearbeitete Methoden vorliegen^{10,12)}.

Aus Gl.(A.10) erhält man nämlich unter der Annahme, daß die Targetzustände μ, v in guter Näherung durch Ein-Loch-Zustände im Sinne des Schalenmodells beschrieben werden können (d.h. die Amplituden $\langle \mu' | a_\mu(t_\mu) | 0 \rangle$ mit $\mu' \neq \mu$ und $\langle 0 | a_\nu^\dagger(t_\nu) | v' \rangle$ mit $v' \neq v$ sind stets klein gegen diejenigen mit $\mu' = \mu$ und $v' = v$):

$$\begin{aligned} G_{k'(-)\mu, \nu k(+)}(t', -\tau; \tau, t) &= - \langle 0 | a_\nu^\dagger(\tau) | v \rangle \times \\ &\times \langle v | T \{ a_{k'(-)}(t') a_{k(+)}^\dagger(t) \} | \mu \rangle \langle \mu | a_\mu(-\tau) | 0 \rangle = \quad (18) \\ &= -i \cdot \langle 0 | a_\nu^\dagger(\tau) | v \rangle \cdot G_{k'(-)k(+)}^{v\mu}(t', t) \cdot \langle \mu | a_\mu(-\tau) | 0 \rangle . \end{aligned}$$

Andererseits kann man die Zweiteilchen-Green-Funktion nach Gl.(A.11) in Einteilchen-Green-Funktionen zerlegen:

$$\begin{aligned}
 G_{k'(-)\mu, \nu k(+)}(t', -\tau; \tau, t) &= G_{k'(-)\nu}(t', \tau) \times \\
 &\times G_{\mu k(+)}(-\tau, t) - G_{k'(-)k(+)}(t', t) G_{\mu\nu}(-\tau, \tau) + \\
 &+ i \cdot G_{k'(-)\kappa}(t', t_{\kappa}) G_{\mu\lambda}(-\tau, t_{\lambda}) \Gamma_{\kappa\lambda, \rho\sigma}(t_{\kappa}, t_{\lambda}; t_{\rho}, t_{\sigma}) \times \\
 &\times G_{\rho\nu}(t_{\rho}, \tau) G_{\sigma k(+)}(t_{\sigma}, t) \quad . \quad (19)
 \end{aligned}$$

Gl.(19) enthält die Green-Funktion

$$G_{k'(-)k(+)}(t', t) := (-i) \langle 0 | T \{ a_{k'(-)}(t') a_{k(+)}^{\dagger}(t) \} | 0 \rangle, \quad (20)$$

in der ein einlaufender und ein auslaufender Zustand vorkommen. Für das Folgende ist es bequem, aus Gl.(20) die Schalenmodell-Streumatrix abzuspalten. Wir erhalten so wegen

$$a_{k'(-)} = s_{k'k''} \cdot a_{k''(+)} \quad (21)$$

aus Gl.(19) die Beziehung

$$\begin{aligned}
 G_{k'(-)\mu, \nu k(+)}(t', -\tau; \tau, t) &= G_{k'(-)\nu}(t', \tau) \times \\
 &\times G_{\mu k(+)}(-\tau, t) - s_{k'k''} \cdot G_{k''(+)\kappa}(t', t) G_{\mu\nu}(-\tau, \tau) + \\
 &+ i \cdot G_{k'(-)\kappa}(t', t_{\kappa}) G_{\mu\lambda}(-\tau, t_{\lambda}) \Gamma_{\kappa\lambda, \rho\sigma}(t_{\kappa}, t_{\lambda}; t_{\rho}, t_{\sigma}) \times \\
 &\times G_{\rho\nu}(t_{\rho}, \tau) G_{\sigma k(+)}(t_{\sigma}, t) \quad . \quad (22)
 \end{aligned}$$

Vernachlässigen wir nun bei der Berechnung der Einteilchen-Green-Funktionen die Restwechselwirkung (Schalenmodell-Näherung), so werden diese in den Indizes diagonal, da sich alle Indizes auf Schalenmodell-Zustände beziehen. Dies hat insbesondere zur Folge, daß auf der rechten Seite von (22) der erste Term verschwindet und der zweite nur bei elastischer Streuung beiträgt:

^{*)} Wir vereinbaren, daß über mehrfach auftretende innere Indizes bzw. Variable zu summieren bzw. zu integrieren ist.

$$\begin{aligned}
 G_{k'}(-)_{\mu, \nu k(+)}(t', -\tau; \tau, t) &= -s_{k', k} \delta_{\mu \nu} G_{k(+)}(t', t) \times \\
 &\times G_{\mu}(-\tau, \tau) + i \cdot G_{k', (-)}(t', t_{\kappa}) G_{\mu}(-\tau, t_{\lambda}) \times \\
 &\times \Gamma_{k'}(-)_{\mu, \nu k(+)}(t_{\kappa}, t_{\lambda}; t_{\rho}, t_{\sigma}) G_{\nu}(t_{\rho}, \tau) G_{k(+)}(t_{\sigma}, t) .
 \end{aligned} \quad (23)$$

Vollzieht man nun den Grenzübergang $\tau \rightarrow \infty$, so folgt unter der Annahme, daß sich Anfangs- und Endzustand des Targets in guter Näherung als Ein-Loch-Zustände beschreiben lassen:

$$\begin{aligned}
 G_{k'}(-)_{\mu, \nu k(+)}(t', -\tau; \tau, t) &\underset{\tau \rightarrow \infty}{=} -s_{k', k} \delta_{\mu \nu} G_{k(+)}(t', t) \times \\
 &\times \langle 0 | a_{\nu}^{\dagger}(\tau) | \nu \rangle \langle \mu | a_{\mu}(-\tau) | 0 \rangle - i \cdot G_{k', (-)}(t', t_{\kappa}) \times \\
 &\times \langle 0 | a_{\mu}^{\dagger}(t_{\lambda}) | \mu \rangle \langle \mu | a_{\mu}(-\tau) | 0 \rangle \Gamma_{k'}(-)_{\mu, \nu k(+)}(t_{\kappa}, t_{\lambda}; t_{\rho}, t_{\sigma}) \times \\
 &\times \langle 0 | a_{\nu}^{\dagger}(\tau) | \nu \rangle \langle \nu | a_{\nu}(t_{\rho}) | 0 \rangle \cdot G_{k(+)}(t_{\sigma}, t) .
 \end{aligned} \quad (24)$$

Durch Vergleich mit Gl.(18) erhält man dann schließlich:

$$\begin{aligned}
 G_{k'}^{\nu \mu}(-)_{k(+)}(t', t) &= s_{k', k} \delta_{\mu \nu} G_{k(+)}(t', t) + \langle 0 | a_{\mu}^{\dagger} | \mu \rangle \times \\
 &\times \langle \nu | a_{\nu} | 0 \rangle \cdot G_{k', (-)}(t', t_{\kappa}) \Gamma_{k'}(-)_{\mu, \nu k(+)}(t_{\kappa}, t_{\mu}; t_{\nu}, t_{\sigma}) \times \\
 &\times G_{k(+)}(t_{\sigma}, t) \exp(i(\epsilon_{\mu} t_{\mu} - \epsilon_{\nu} t_{\nu})) .
 \end{aligned} \quad (25)$$

Die hier auftretenden Größen $\langle 0 | a_{\mu}^{\dagger} | \mu \rangle$ und $\langle \nu | a_{\nu} | 0 \rangle$ haben die Bedeutung "spektroskopischer Faktoren": es wird nämlich der exakte Targetzustand mit einem Schalenmodell-Zustand verglichen:

$$z_{\nu} := |\langle \nu | a_{\nu} | 0 \rangle|^2. \quad (26)$$

Um Gl.(25) in Gl.(16) einsetzen zu können, müssen wir sie noch einer Fouriertransformation unterwerfen. Man erhält so nach längerer Zwischenrechnung (vgl. Anhang A):

$$G_{k'(-)k(+)}^{\nu\mu}(\epsilon) = s_{k'k} \delta_{\nu\mu} G_{k(+)}(\epsilon) + \sqrt{z_{\mu} z_{\nu}} G_{k'(-)}(\epsilon + \hat{\omega}_{\nu\mu}/2) \times \\ \times \Gamma_{k'(-)\mu, \nu k(+)}((\epsilon + \epsilon_{\nu} + \hat{\omega}_{\nu\mu}/2)/2, (\epsilon + \epsilon_{\mu} - \hat{\omega}_{\nu\mu}/2)/2; \epsilon - \epsilon_{\nu\mu}) \times \quad (27) \\ \times G_{k(+)}(\epsilon - \hat{\omega}_{\nu\mu}/2) ,$$

wobei wir die Variable

$$\epsilon_{\nu\mu} := (\epsilon_{\nu} + \epsilon_{\mu})/2 \quad (28)$$

eingeführt haben. Da die Spektraldarstellung der Einteilchen-Green-Funktion $G_{k(\pm)}$ in Schalenmodell-Näherung bekannt ist-

$$G_{k(\pm)}(\omega) = \left(\omega - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + i0 \right)^{-1} \quad (29)$$

(vgl. Anhang A, Gl.(A.4b)), kann man Gl.(27) in (16) einsetzen und erhält eine einfache Beziehung zwischen dem Teilchen-Loch-Anteil der Reaktionsamplitude und dem Vertex:

$$f_{k'k}^{\nu\mu}(\text{TL}) = -\sqrt{z_{\nu} z_{\mu}} \frac{2m}{4\pi\hbar^2} \Gamma_{k'(-)\mu, \nu k(+)}(\epsilon_{\nu} + \zeta/2, \epsilon_{\mu} + \zeta/2; \zeta) \\ \text{mit} \quad (30)$$

$$\zeta := \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \epsilon_{\mu} .$$

Will man die Reaktionsamplitude auch für elastische Streuung berechnen, so hat man Gl.(30) noch um die Streuamplitude für die Potentialstreuung zu ergänzen; für inelastische Streuung liefert Gl.(30) bereits die gesamte Reaktionsamplitude.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt berechnet sich dann zu¹⁸⁾

$$\frac{d\sigma_{k'k}^{\nu\mu}}{dk'} = \frac{k'}{k} \cdot |f_{k'k}^{\nu\mu}|^2 , \quad (31)$$

und der totale Wirkungsquerschnitt ist gegeben durch

$$\sigma_{k'k}^{\nu\mu} = \frac{k'}{k} \int dk' |f_{k'k}^{\nu\mu}|^2 . \quad (32)$$

3. Berechnung des Vertex

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, wie man den Vertex aus einer effektiven Teilchen-Loch-Wechselwirkung berechnen kann.

Mit Hilfe der Funktionalmethode¹⁹⁾ erhält man (vgl. Anhang B) für den Vertex die Gleichung

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(t_\alpha, t_\beta; t_\gamma, t_\delta) &= F_{\alpha\beta,\gamma\delta}(t_\alpha, t_\beta; t_\gamma, t_\delta) + \\ &+ i \cdot F_{\alpha\mu,\gamma\nu}(t_\alpha, t_\mu; t_\gamma, t_\nu) R_{\nu\rho,\mu\sigma}(t_\nu, t_\rho; t_\mu, t_\sigma) \times \\ &\times F_{\sigma\beta,\rho\delta}(t_\sigma, t_\beta; t_\rho, t_\delta) ; \end{aligned} \quad (33)$$

hierbei ist R die lineare Antwortfunktion²⁰⁾

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta,\gamma\delta}(t_\alpha, t_\beta; t_\gamma, t_\delta) &:= G_{\alpha\beta,\gamma\delta}(t_\alpha, t_\beta; t_\gamma, t_\delta) - \\ &- G_{\alpha\gamma}(t_\alpha, t_\gamma) G_{\beta\delta}(t_\beta, t_\delta) , \end{aligned} \quad (34)$$

und F ist die effektive Teilchen-Loch-Wechselwirkung (oder der irreduzible Anteil des Vertex²¹⁾), die von Migdal und anderen in der folgenden Weise angesetzt wurde²²⁾:

$$\begin{aligned} F(\vec{r}_\alpha, t_\alpha, \vec{r}_\beta, t_\beta; \vec{r}_\gamma, t_\gamma, \vec{r}_\delta, t_\delta) &= \delta(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\gamma) \delta(\vec{r}_\beta - \vec{r}_\delta) \delta(t_\alpha - t_\beta) \times \\ &\times \delta(t_\alpha - t_\gamma) \delta(t_\beta - t_\delta) \delta(t_\alpha - t_\beta) \cdot \{f(r_\alpha) + f'(r_\alpha)(\vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\beta) + \\ &+ (g(r_\alpha) + g'(r_\alpha)(\vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\beta)) \cdot (\vec{\sigma}_\alpha \cdot \vec{\sigma}_\beta)\} =: F(\vec{r}_\alpha, \vec{r}_\beta; \vec{r}_\gamma, \vec{r}_\delta) \times \\ &\times \delta(t_\alpha - t_\gamma) \delta(t_\beta - t_\delta) \delta(t_\alpha - t_\beta) , \end{aligned} \quad (35)$$

wobei f, f', g und g' lineare Funktionen der Dichte

$$f(r) = C_F \cdot \{f_{ex} + (f_{in} - f_{ex}) \cdot \frac{\rho(r)}{\rho(0)}\} \quad \text{u.s.w.} \quad (36)$$

und $C_F, f_{in}, f'_{in}, \dots, f_{ex}, f'_{ex}, \dots$ Konstanten sind.

Wie man leicht sieht, hängt die Fouriertransformierte der effektiven Teilchen-Loch-Wechselwirkung (35) nicht von den Energievariablen ab. Die Wahl von F führt auch dazu, daß wir in Gl.(33) nur die von zwei Zeiten abhängige lineare

Antwortfunktion

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta,\gamma\delta}(t_\alpha, t_\beta) &:= R_{\alpha\beta,\gamma\delta}(t_\alpha, t_\beta; t_\alpha^+, t_\beta^+) = \\ &= R_{\alpha\beta,\gamma\delta}(t_\alpha^-, t_\beta^-; t_\alpha, t_\beta) \end{aligned} \quad (37)$$

zu betrachten brauchen, und daß auch der Vertex Γ nur von zwei Zeiten bzw. einer Energievariablen abhängt:

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\hat{\omega}) = F_{\alpha\beta,\gamma\delta} + i \cdot F_{\alpha\mu,\gamma\nu} R_{\nu\rho,\mu\sigma}(\hat{\omega}) F_{\sigma\beta,\rho\delta} \quad (38)$$

Das Problem der Berechnung des Vertex ist also nun äquivalent mit dem der Berechnung der Spektraldarstellung der linearen Antwortfunktion (37):

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\hat{\omega}) &= i \cdot \sum_{\lambda>0} \left[\frac{\langle 0 | a_\delta^\dagger a_\beta | \lambda \rangle \langle \lambda | a_\gamma^\dagger a_\alpha | 0 \rangle}{\hat{\omega} + \epsilon_\lambda - i0} - \right. \\ &- \left. \frac{\langle 0 | a_\gamma^\dagger a_\alpha | \lambda \rangle \langle \lambda | a_\delta^\dagger a_\beta | 0 \rangle}{\hat{\omega} - \epsilon_\lambda + i0} \right] = i \cdot \sum_{\lambda>0} \left[\frac{\rho_{\beta\delta}^\lambda \cdot \rho_{\alpha\gamma}^{\lambda*}}{\hat{\omega} + \epsilon_\lambda - i0} - \right. \\ &- \left. \frac{\rho_{\alpha\gamma}^\lambda \cdot \rho_{\beta\delta}^{\lambda*}}{\hat{\omega} - \epsilon_\lambda + i0} \right] \quad (39) \end{aligned}$$

Hierin sind λ die Eigenzustände des A-Nukleonensystems; mit 0 bezeichnen wir dessen Grundzustand. Die Summationsvorschrift $\lambda>0$ besagt, daß über alle Anregungszustände ($\epsilon_\lambda>0$) zu summieren ist. In Hinblick auf Gl.(30) und Gl.(32) bedeutet das, daß über alle Anregungszustände des magischen Compound-Kernes zu summieren ist.

Mit Hilfe der Funktionalmethode zeigt man (vgl. Anhang B), daß die lineare Antwortfunktion der Integralgleichung

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta,\gamma\delta}(t_\alpha, t_\beta; t_\gamma, t_\delta) &= R_{\alpha\beta,\gamma\delta}^0(t_\alpha, t_\beta; t_\gamma, t_\delta) - \\ &- i \cdot R_{\alpha\mu,\gamma\nu}^0(t_\alpha, t_\mu; t_\gamma, t_\nu) F_{\nu\rho,\mu\sigma}(t_\nu, t_\rho; t_\mu, t_\sigma) \times \\ &\times R_{\sigma\beta,\rho\delta}(t_\sigma, t_\beta; t_\rho, t_\delta) \end{aligned} \quad (40)$$

mit

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta}^0(t_\alpha, t_\beta; t_\gamma, t_\delta) := -G_{\alpha\delta}(t_\alpha, t_\delta) G_{\beta\gamma}(t_\beta, t_\gamma) \quad (41)$$

genügt. Für die von zwei Zeiten abhängige lineare Antwortfunktion (37) erhalten wir dann mit (35) die Integralgleichung

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta}(t_\alpha, t_\beta) = R_{\alpha\beta,\gamma\delta}^0(t_\alpha, t_\beta) - i \cdot R_{\alpha\mu,\gamma\nu}^0(t_\alpha, t_\mu) \times \\ \times F_{\nu\rho,\mu\sigma} R_{\sigma\beta,\rho\delta}(t_\mu, t_\beta) \quad \text{d.h.} \quad (42)$$

wobei die von zwei Zeiten abhängige Funktion R^0 analog zu (37) definiert ist. Nehmen wir darüberhinaus noch an, daß die Einteilchen-Green-Funktionen in Gl.(41) in den Indizes diagonal sind (Schalenmodell-Näherung), so erhalten wir nach einer Fouriertransformation

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\hat{\omega}) = \langle \alpha | \delta \rangle \langle \beta | \gamma \rangle \int d\epsilon G_\alpha(\epsilon + \hat{\omega}/2) G_\gamma(\epsilon - \hat{\omega}/2) / 2\pi - \\ - i \int d\epsilon G_\alpha(\epsilon + \hat{\omega}/2) G_\gamma(\epsilon - \hat{\omega}/2) F_{\alpha\mu,\gamma\nu} R_{\nu\beta,\mu\delta}(\hat{\omega}) / 2\pi \quad (43)$$

bzw. mit

$$\Lambda_{\alpha\beta}(\hat{\omega}) := i \int d\epsilon G_\alpha(\epsilon + \hat{\omega}/2) G_\beta(\epsilon - \hat{\omega}/2) / 2 \quad (44)$$

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\hat{\omega}) = -i \cdot \langle \alpha | \delta \rangle \langle \beta | \gamma \rangle \cdot \Lambda_{\alpha\gamma}(\hat{\omega}) - \Lambda_{\alpha\gamma}(\hat{\omega}) F_{\alpha\mu,\gamma\nu} \times \\ \times R_{\nu\beta,\mu\delta}(\hat{\omega}) \quad (45)$$

Setzen wir hier nun für die lineare Antwortfunktion Gl.(39) ein, so erhalten wir durch Residuenvergleich

$$\rho_{\alpha\gamma}^\lambda = -\Lambda_{\alpha\gamma}(\epsilon_\lambda - i0) F_{\alpha\beta,\gamma\delta} \rho_{\delta\beta}^\lambda \quad (46)$$

Da die Spektraldarstellung der Einteilchen-Green-Funktionen bekannt ist (Gl.(A.4b)), kann man Λ ausrechnen; es ergibt sich

$$\Lambda_{\alpha\beta}(\hat{\omega}) = \frac{z_\alpha z_\beta (n_\alpha - n_\beta)}{\hat{\omega} + \epsilon_\beta - \epsilon_\alpha + i(n_\beta - n_\alpha)\sigma} \quad (47)$$

mit

$$n_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{für Teilchen} \\ 1 & \text{für Löcher} \end{cases} \quad (48)$$

Aus Gl.(46) folgt dann

$$(\epsilon_\lambda + \epsilon_\beta - \epsilon_\alpha) \rho_{\alpha\beta}^\lambda = z_\alpha z_\beta (n_\beta - n_\alpha) F_{\alpha\gamma, \beta\delta} \rho_{\delta\gamma}^\lambda \quad (49)$$

Aus dieser Eigenwertgleichung, die unter der Bezeichnung "Random-Phase-Gleichung" bekannt ist, bestimmt man die Anregungsenergien und die Teilchen-Loch-Amplituden der Zustände λ . Wenn wir uns bei den Compound-Zuständen des magischen Kerns auf diejenigen Zustände beschränken, die sich als Teilchen-Loch-Anregungen beschreiben lassen, so können wir aus den Lösungen von (49) die lineare Antwortfunktion (39) bestimmen.

Die Lösung der Random-Phase-Gleichung (49) wird dadurch kompliziert, daß die Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ auch über Zustände aus dem Kontinuum laufen d.h. Gl.(49) ist eine Integralgleichung. Die Erfahrung zeigt jedoch, daß die Kopplung zwischen den diskreten Zuständen und dem Kontinuum schwächer ist als die Kopplung zwischen den verschiedenen diskreten Zuständen. Dies gilt jedoch nicht für solche Zustände aus dem Kontinuum, die eine Einteilchen-Resonanz enthalten; diese Zustände wollen wir wie die diskreten behandeln, eine nähere Begründung dafür erfolgt in Anhang C. Es ist ferner zu erwarten, daß die Kontinuumsbeimischungen im Grundzustand des Compound-Kerns sehr klein sind, so daß man Amplituden der Art $\rho_{\alpha k(\pm)}^\lambda$ (α : diskreter Zustand, $k(\pm)$: Zustand aus dem Kontinuum) und solche mit zwei kontinuierlichen Indizes ganz vernachlässigen kann.

Unter diesen Voraussetzungen kann man eine Störungsrechnung für die lineare Antwortfunktion (39) durchführen: In nullter Näherung vernachlässigen wir alle Teilchen-Loch-Amplituden, in denen kontinuierliche Indizes auftreten. Gl.(49) reduziert sich dann auf eine normale Matrix-Random-Phase-Gleichung. In erster Näherung erhalten wir dann

$$\rho_{k(\pm)\alpha}^\lambda = \Lambda_{k(\pm)\alpha} (\epsilon_\lambda) F_{k(\pm)\gamma, \alpha\delta} \rho_{\delta\gamma}^\lambda \quad (50)$$

wobei sich nun die Indizes α, γ, δ auf diskrete Zustände beziehen. Die Ankopplung des Kontinuums führt zu einer Verschiebung der Anregungsenergien des Compound-Kerns ins

[†]) Normierung der Eigenvektoren:

$$\sum_{\alpha\beta} (n_\alpha - n_\beta) \rho_{\alpha\beta}^{\lambda^2} / (z_\alpha z_\beta) = \text{sign}(\epsilon_\lambda)$$

Komplexe: $\epsilon_\lambda + \delta\epsilon_\lambda$ mit $\delta\epsilon_\lambda = \text{Re}(\delta\epsilon_\lambda) - i \cdot \gamma_\lambda/2$; γ_λ hat die Bedeutung einer Zerfallsbreite des Zustandes λ .

In erster Näherung der Störungsrechnung (vgl. Anhang C) erhält man^{*)}:

$$\delta\epsilon_\lambda = \frac{1}{\|\rho^\lambda\|^2} \sum_{k'} \sum_{\alpha\beta} z_\alpha z_\beta z_\nu \frac{|F_{k'}(+)\alpha, \nu \beta \rho_{\beta\alpha}^\lambda|^2}{E_\lambda - \frac{\hbar^2 k'^2}{2m'} - E_\nu + i0}$$

$$E_\lambda = E_0 + \epsilon_\lambda \quad E_\nu = E_0 - \epsilon_\nu \quad (51)$$

$$\|\rho^\lambda\|^2 := \sum_{\alpha\beta} |\rho_{\alpha\beta}^\lambda|^2,$$

wobei sich die Indizes α, β, ν auf diskrete Zustände beziehen. Macht man die Näherung $z_\alpha = z_\beta = z_\nu = z$, so lassen sich die Zerfallsbreiten leicht ausrechnen. Es ergibt sich^{§)}

$$\gamma_\lambda = 2\bar{m}\pi z^3 \sum_{t_{\frac{1}{2}} m'_s \nu} k' \int dk' |F_{k'}(+)\alpha, \nu \beta \rho_{\beta\alpha}^\lambda|^2_{k'=k} / (\hbar \|\rho^\lambda\|)^2$$

$$k = \sqrt{2m'(E_\lambda - E_\nu)/\hbar^2} \quad (52)$$

$$\bar{m} = (m_p + m_n)/2.$$

Der Realteil der Energieverschiebung enthält ein Hauptwertintegral; seine Berechnung ist numerisch sehr aufwendig, da ein analytischer Ausdruck für den Integranden nicht bekannt ist. Die Erfahrung zeigt aber, daß die Kopplung zwischen den diskreten Zuständen und dem Kontinuum erheblich schwächer ist als die Kopplung zwischen den diskreten Zuständen allein. Der Realteil der Energieverschiebung sollte daher klein sein, zumal nicht über Einteilchenresonanzen integriert wird.

Wir erhalten somit näherungsweise für den Teilchen-Loch-Anteil der Reaktionsamplitude bzw. die Reaktionsamplitude

*) $\sum$ bedeutet Summation (Integration) über das Kontinuum, wobei die resonanten Partialwellen auszulassen sind.

§) Mit $t_{\frac{1}{2}}$ und m'_s bezeichnen wir die dritte Komponente des Isospins und die Spinpolarisation.

für inelastische Streuung

$$f_{k',k}^{\nu\mu}(TL) = - \frac{2m}{4\pi\hbar^2} \sqrt{z_\mu z_\nu} \left[F_{k'(-)\mu,\nu k(+)} + \right. \\ \left. + \sum_{\lambda>0} \frac{(F_{k'(-)\alpha,\nu\beta} \rho_{\beta\alpha}^\lambda) (F_{k(+)\gamma,\mu\delta} \rho_{\delta\gamma}^\lambda)^*}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + E_\mu - E_\lambda + i \frac{\gamma_\lambda}{2}} \right] \quad (53)$$

Dabei haben wir den zweiten Term in der linearen Antwortfunktion (39) vernachlässigt, da er keine Resonansterme enthält und nur zum Untergrund beiträgt. Gl.(53) wird also einen zu kleinen Untergrund beim Wirkungsquerschnitt liefern.

Die Reaktionsamplitude besteht also aus zwei Anteilen: der erste Term in (53) ist der Beitrag der direkten Reaktion, der zweite Term beschreibt die Compound-Kern-Reaktionen, wobei als Compound-Zustände die Teilchen-Loch-Zustände des magischen Nachbarkernes auftreten.

Die Näherungsannahme, daß die Matrixelemente der effektiven Teilchen-Loch-Wechselwirkung F nicht von den Energievariablen abhängen, hat zur Folge, daß der Vertex Γ nicht den Symmetriebeziehungen genügt, die das Pauliprinzip fordert. Aus der Definitionsgleichung des Vertex erhält man nämlich nach einer Fouriertransformation die Beziehung

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\epsilon,\epsilon';\hat{\omega}) = -\Gamma_{\beta\alpha,\gamma\delta}((\epsilon+\epsilon'-\hat{\omega})/2,(\epsilon+\epsilon'+\hat{\omega})/2;\epsilon'-\epsilon) = \\ = -\Gamma_{\alpha\beta,\delta\gamma}((\epsilon+\epsilon'+\hat{\omega})/2,(\epsilon+\epsilon'-\hat{\omega})/2;\epsilon-\epsilon') \quad (54)$$

Hieraus erkennt man unmittelbar, daß diese Antisymmetriebedingungen nicht erfüllt werden, wenn die Matrixelemente von F nicht von den Energievariablen abhängen, weil dann der Vertex Γ nur von einer Energievariablen abhängt. Werner und Zawischa²³⁾ haben ein Verfahren angegeben, das diese Schwierigkeit vermeidet. Für praktische Anwendungen ist dieses Verfahren jedoch zu aufwendig.

4. Die Partialwellenentwicklung der Reaktionsamplitude

Um die Reaktionsamplitude für die inelastische Streuung von Nukleonen an Ein-Loch-Kernen zu berechnen, hat man zunächst die Random-Phase-Gleichung (49) zu lösen, wobei man die Teilchen-Loch-Amplituden und die Anregungsenergien der Compound-Zustände erhält. Da wir uns auf solche Compound-Zustände beschränken wollen, die sich als Teilchen-Loch-Anregungen beschreiben lassen, liefert Gl.(49) die Eigenvektoren der Compound-Zustände. Mit den Lösungen von (49) kann man dann mit (52) die Breiten und mit (53) die Reaktionsamplitude berechnen.

Da man die Zustände bei leichten Kernen üblicherweise durch ihren Drehimpuls J , ihren Isospin T und ihre Parität klassifiziert, liegt es nahe, eine diesbezügliche Reduktion der Random-Phase-Gleichung (49) durchzuführen. Wir wollen dabei annehmen, daß sich die Einteilchenwellenfunktionen für Protonen und Neutronen nur durch den Isospinanteil unterscheiden. Diese Näherungsannahme ist für die gebundenen Zustände bei leichten Kernen gerechtfertigt²⁴⁾. Zunächst wollen wir die Reduktion der Matrixelemente der Teilchen-Loch-Wechselwirkung F durchführen. Dazu setzen wir

$$\begin{aligned}
 F^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}_3, \vec{r}_4) &:= f(r_1) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_4) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) , \\
 F^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}_3, \vec{r}_4) &:= f'(r_1) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_4) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \\
 &\quad \times (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) , \\
 F^{(3)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}_3, \vec{r}_4) &:= g(r_1) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_4) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \\
 &\quad \times (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) , \\
 F^{(4)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}_3, \vec{r}_4) &:= g'(r_1) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_4) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \\
 &\quad \times (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) , \\
 F(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}_3, \vec{r}_4) &= \sum_{i=1}^4 F^{(i)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}_3, \vec{r}_4) .
 \end{aligned} \tag{55}$$

Dann folgt wegen

$$\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\delta(r_1 - r_2)}{r_1^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} Y^{(\ell)}(1) \cdot Y^{(\ell)}(2) \quad (56)$$

die Gleichung

$$\begin{aligned} F_{\alpha\gamma, \beta\delta}^{(1)} &= \langle \phi_{\alpha}(\vec{r}_1) \phi_{\gamma}(\vec{r}_2) | \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) f(r_1) | \phi_{\beta}(\vec{r}_1) \phi_{\delta}(\vec{r}_2) \rangle = \\ &= \int_0^{\infty} dr f(r) R_{\alpha}(r) R_{\gamma}(r) R_{\beta}(r) R_{\delta}(r) \times \\ &\times \sum_{\ell} \langle \ell_{\alpha} j_{\alpha} \Omega_{\alpha}, \ell_{\gamma} j_{\gamma} \Omega_{\gamma} | Y^{(\ell)}(1) \cdot Y^{(\ell)}(2) | \ell_{\beta} j_{\beta} \Omega_{\beta}, \ell_{\delta} j_{\delta} \Omega_{\delta} \rangle \times \\ &\times \langle \frac{1}{2} t_{\alpha 3}, \frac{1}{2} t_{\gamma 3} | \frac{1}{2} t_{\beta 3}, \frac{1}{2} t_{\delta 3} \rangle . \end{aligned} \quad (57)$$

Setze

$$\langle \alpha\gamma | f | \beta\delta \rangle := \int_0^{\infty} dr f(r) R_{\alpha}(r) R_{\gamma}(r) R_{\beta}(r) R_{\delta}(r) . \quad (58)$$

Durch Kopplung zum Gesamtdrehimpuls und Gesamtisospin erhält man dann aus (57)

$$\begin{aligned} F_{\alpha\gamma, \beta\delta}^{(1)} &= \langle \alpha\gamma | f | \beta\delta \rangle \sum_{JM J' M' T T_3 T' T'_3} \left(\begin{matrix} j_{\alpha} & j_{\gamma} & J \\ \Omega_{\alpha} & \Omega_{\gamma} & M \end{matrix} \middle| \begin{matrix} J \\ M \end{matrix} \right) \times \\ &\times \left(\begin{matrix} j_{\beta} & j_{\delta} & J' \\ \Omega_{\beta} & \Omega_{\delta} & M' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} J' \\ M' \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & T \\ t_{\alpha 3} & t_{\gamma 3} & T_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T \\ T_3 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & T' \\ t_{\beta 3} & t_{\delta 3} & T'_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T' \\ T'_3 \end{matrix} \right) \times \\ &\times \langle \ell_{\alpha} j_{\alpha} \ell_{\gamma} j_{\gamma} J M | Y^{(\ell)}(1) \cdot Y^{(\ell)}(2) | \ell_{\beta} j_{\beta} \ell_{\delta} j_{\delta} J' M' \rangle \times \\ &\times \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} T T_3 | \frac{1}{2} \frac{1}{2} T' T'_3 \rangle . \end{aligned} \quad (59)$$

Die rechte Seite kann man unter Verwendung von Gl.(D.6) und

$$\begin{aligned} \langle \ell_{\alpha} || Y^{(\ell)} || \ell_{\beta} \rangle &= (-1)^{\ell_{\alpha}} \sqrt{\frac{(2\ell_{\alpha}+1)(2\ell+1)(2\ell_{\beta}+1)}{4\pi}} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \ell_{\alpha} & \ell & \ell_{\beta} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (60)$$

[†]) $R_{\alpha}(r)$ bezeichnet den Radialanteil der Wellenfunktion $\phi_{\alpha}(\vec{r})$.

auswerten. Man erhält

$$\begin{aligned}
 F_{\alpha\gamma, \beta\delta}^{(1)} &= \frac{\langle \alpha\gamma | f | \beta\delta \rangle}{4\pi} \sum_{JMTT_3SL\ell} \begin{pmatrix} j_\alpha & j_\gamma & J \\ \Omega_\alpha & \Omega_\gamma & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_\beta & j_\delta & J \\ \Omega_\beta & \Omega_\delta & M \end{pmatrix} \times \\
 &\times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & T \\ t_{\alpha 3} & t_{\gamma 3} & T_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & T \\ t_{\beta 3} & t_{\delta 3} & T_3 \end{pmatrix} (-1)^{j_\alpha + j_\beta + L} \cdot (2\ell + 1) \times \\
 &\times (2S + 1)(2L + 1) \sqrt{(2\ell_\alpha + 1)(2\ell_\gamma + 1)(2\ell_\beta + 1)(2\ell_\delta + 1)(2j_\alpha + 1)} \times (61) \\
 &\times \sqrt{(2j_\gamma + 1)(2j_\beta + 1)(2j_\delta + 1)} \begin{pmatrix} \ell_\alpha & \ell_\gamma & \ell_\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_\gamma & \ell_\delta & \ell_\delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} \ell_\alpha & \ell_\gamma & L \\ \ell_\delta & \ell_\beta & \ell \end{matrix} \right\} \times \\
 &\times \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & \ell_\alpha & j_\alpha \\ \frac{1}{2} & \ell_\gamma & j_\gamma \\ S & L & J \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & \ell_\beta & j_\beta \\ \frac{1}{2} & \ell_\delta & j_\delta \\ S & L & J \end{matrix} \right\} .
 \end{aligned}$$

Analog berechnet man

$$\begin{aligned}
 F_{\alpha\gamma, \beta\delta}^{(2)} &= \langle \phi_\alpha(\vec{r}_1) \phi_\gamma(\vec{r}_2) | \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) f'(r_1) (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) \times \\
 &\times | \phi_\beta(\vec{r}_1) \phi_\delta(\vec{r}_2) \rangle = \int_0^\infty dr f'(r) R_\alpha(r) R_\gamma(r) R_\beta(r) R_\delta(r) \times \\
 &\times \int_\ell \langle \ell_\alpha j_\alpha \Omega_\alpha, \ell_\gamma j_\gamma \Omega_\gamma | Y^{(\ell)}(1) \cdot Y^{(\ell)}(2) | \ell_\beta j_\beta \Omega_\beta, \ell_\delta j_\delta \Omega_\delta \rangle \times \\
 &\times \langle \frac{1}{2} t_{\alpha 3}, \frac{1}{2} t_{\gamma 3} | \tau^{(1)}(1) \cdot \tau^{(1)}(2) | \frac{1}{2} t_{\beta 3}, \frac{1}{2} t_{\delta 3} \rangle . \quad (62)
 \end{aligned}$$

Mit

$$\langle \alpha\gamma | f' | \beta\delta \rangle := \int_0^\infty dr f'(r) R_\alpha(r) R_\gamma(r) R_\beta(r) R_\delta(r) \quad (63)$$

erhält man nach Kopplung zum Gesamtdrehimpuls und Gesamtisospin:

$$\begin{aligned}
 F_{\alpha\gamma, \beta\delta}^{(2)} &= \langle \alpha\gamma | f' | \beta\delta \rangle \sum_{JMJ'M'TT_3T_1'T_3'\ell} \begin{pmatrix} j_\alpha & j_\gamma & J \\ \Omega_\alpha & \Omega_\gamma & M \end{pmatrix} \times \\
 &\times \begin{pmatrix} j_\beta & j_\delta & J' \\ \Omega_\beta & \Omega_\delta & M' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & T \\ t_{\alpha 3} & t_{\gamma 3} & T_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & T' \\ t_{\beta 3} & t_{\delta 3} & T_3' \end{pmatrix} \times \\
 &\times \langle \ell_\alpha j_\alpha \ell_\gamma j_\gamma JM | Y^{(\ell)}(1) \cdot Y^{(\ell)}(2) | \ell_\beta j_\beta \ell_\delta j_\delta J'M' \rangle \times \\
 &\times \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} TT_3 | \tau^{(1)}(1) \cdot \tau^{(1)}(2) | \frac{1}{2} \frac{1}{2} T'T_3' \rangle . \quad (64)
 \end{aligned}$$

Die rechte Seite läßt sich analog wie oben auswerten. Es folgt mit Hilfe der Gln.(15.5) und (14.21) aus de Shalit-Talmi²⁵⁾

$$\begin{aligned}
 F_{\alpha\gamma,\beta\delta}^{(2)} &= \frac{3 \cdot \langle \alpha\gamma | f' | \beta\delta \rangle}{8\pi} \sum_{JMTT_3SL} \left(\begin{matrix} j_\alpha & j_\gamma & J \\ \Omega_\alpha & \Omega_\gamma & M \end{matrix} \right) \times \\
 &\times \left(\begin{matrix} j_\beta & j_\delta & J \\ \Omega_\beta & \Omega_\delta & M \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 1/2 & 1/2 & T \\ t_{\alpha 3} & t_{\gamma 3} & T_3 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 1/2 & 1/2 & T \\ t_{\beta 3} & t_{\delta 3} & T_3 \end{matrix} \right) (-1)^{l_\alpha + l_\beta + L} \times \\
 &\times (-1)^{T+1} (2l_\alpha + 1) (2S + 1) (2L + 1) \sqrt{(2l_\alpha + 1) (2l_\gamma + 1) (2l_\beta + 1)} \times (65) \\
 &\times \sqrt{(2l_\delta + 1) (2j_\alpha + 1) (2j_\gamma + 1) (2j_\beta + 1) (2j_\delta + 1)} \left(\begin{matrix} l_\alpha & l & l_\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right) \times \\
 &\times \left(\begin{matrix} l_\gamma & l & l_\delta \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right) \left\{ \begin{matrix} l_\alpha & l_\gamma & L \\ l_\delta & l_\beta & l \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & 1/2 & T \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & l_\alpha & j_\alpha \\ 1/2 & l_\gamma & j_\gamma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & l_\beta & j_\beta \\ 1/2 & l_\delta & j_\delta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} S & L & J \\ S & L & J \end{matrix} \right\} .
 \end{aligned}$$

Berechnung von $F_{\alpha\gamma,\beta\delta}^{(3)}$:

$$\begin{aligned}
 F_{\alpha\gamma,\beta\delta}^{(3)} &= \langle \phi_\alpha(\vec{r}_1) \phi_\gamma(\vec{r}_2) | \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) g(r_1) (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \times \\
 &\times | \phi_\beta(\vec{r}_1) \phi_\delta(\vec{r}_2) \rangle = \int_0^\infty dr g(r) R_\alpha(r) R_\gamma(r) R_\beta(r) R_\delta(r) \times (66) \\
 &\times \sum_l \langle l_\alpha j_\alpha \Omega_\alpha, l_\gamma j_\gamma \Omega_\gamma | (Y^{(l)}(1) \cdot Y^{(l)}(2)) (\sigma^{(1)}(1) \cdot \sigma^{(2)}(2)) \times \\
 &\times | l_\beta j_\beta \Omega_\beta, l_\delta j_\delta \Omega_\delta \rangle \langle 1/2 t_{\alpha 3}, 1/2 t_{\gamma 3} | 1/2 t_{\beta 3}, 1/2 t_{\delta 3} \rangle .
 \end{aligned}$$

Setze

$$\langle \alpha\gamma | g | \beta\delta \rangle := \int_0^\infty dr g(r) R_\alpha(r) R_\gamma(r) R_\beta(r) R_\delta(r) . \quad (67)$$

Dann erhält man nach Kopplung zum Gesamtdrehimpuls und Gesamtisospin

$$\begin{aligned}
 F_{\alpha\gamma,\beta\delta}^{(3)} &= \langle \alpha\gamma | g | \beta\delta \rangle \sum_{JMJ'M'TT_3L} \left(\begin{matrix} j_\alpha & j_\gamma & J \\ \Omega_\alpha & \Omega_\gamma & M \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} j_\beta & j_\delta & J' \\ \Omega_\beta & \Omega_\delta & M' \end{matrix} \right) \times \\
 &\times \left(\begin{matrix} 1/2 & 1/2 & T \\ t_{\alpha 3} & t_{\gamma 3} & T_3 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 1/2 & 1/2 & T \\ t_{\beta 3} & t_{\delta 3} & T_3 \end{matrix} \right) \langle l_\alpha j_\alpha l_\gamma j_\gamma J M | \times (68) \\
 &\times (Y^{(l)}(1) \cdot Y^{(l)}(2)) (\sigma^{(1)}(1) \cdot \sigma^{(1)}(2)) | l_\beta j_\beta l_\delta j_\delta J' M' \rangle .
 \end{aligned}$$

Die rechte Seite kann man unter Verwendung von Gl.(D.5) und der Gl.(14.21) aus der Shalit-Talmi²⁵⁾ auswerten. Man erhält:

$$\begin{aligned}
 F_{\alpha\gamma,\beta\delta}^{(3)} &= \frac{3 \cdot \langle \alpha\gamma | g | \beta\delta \rangle}{8\pi} \sum_{JMTT_3SL\ell} \begin{pmatrix} j_\alpha & j_\gamma & J \\ \Omega_\alpha & \Omega_\gamma & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_\beta & j_\delta & J \\ \Omega_\beta & \Omega_\delta & M \end{pmatrix} \times \\
 &\times \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & T \\ t_{\alpha 3} & t_{\gamma 3} & T_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & T \\ t_{\beta 3} & t_{\delta 3} & T_3 \end{pmatrix} (-1)^{\ell_\alpha + \ell_\beta + L + S + 1} (2\ell + 1) \times \\
 &\times (2S + 1)(2L + 1) \sqrt{(2\ell_\alpha + 1)(2\ell_\gamma + 1)(2\ell_\beta + 1)(2\ell_\delta + 1)(2j_\alpha + 1)} \times (69) \\
 &\times \sqrt{(2j_\gamma + 1)(2j_\beta + 1)(2j_\delta + 1)} \begin{pmatrix} \ell_\alpha & \ell & \ell_\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_\gamma & \ell & \ell_\delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} \ell_\alpha & \ell_\gamma & L \\ \ell_\delta & \ell_\beta & \ell \end{matrix} \right\} \times \\
 &\times \left\{ \begin{matrix} 1/2 & 1/2 & S \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & \ell_\alpha & j_\alpha \\ 1/2 & \ell_\gamma & j_\gamma \\ S & L & J \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & \ell_\beta & j_\beta \\ 1/2 & \ell_\delta & j_\delta \\ S & L & J \end{matrix} \right\}.
 \end{aligned}$$

Berechnung von $F_{\alpha\gamma,\beta\delta}^{(4)}$:

$$\begin{aligned}
 F_{\alpha\gamma,\beta\delta}^{(4)} &= \langle \phi_\alpha(\vec{r}_1) \phi_\gamma(\vec{r}_2) | \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) g'(r_1) (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) \times \\
 &\times | \phi_\beta(\vec{r}_1) \phi_\delta(\vec{r}_2) \rangle = \int_0^\infty dr g'(r) R_\alpha(r) R_\gamma(r) R_\beta(r) R_\delta(r) \times (70) \\
 &\times \sum_\ell \langle \ell_\alpha j_\alpha \Omega_\alpha, \ell_\gamma j_\gamma \Omega_\gamma | (Y^{(\ell)}(1) \cdot Y^{(\ell)}(2)) (\sigma^{(1)}(1) \cdot \sigma^{(1)}(2)) \times \\
 &\times \langle 1/2 t_{\alpha 3}, 1/2 t_{\gamma 3} | \tau^{(1)}(1) \cdot \tau^{(1)}(2) | 1/2 t_{\beta 3}, 1/2 t_{\delta 3} \rangle.
 \end{aligned}$$

Die weitere Rechnung ist nun analog der Berechnung der Matrixelemente $F_{\alpha\gamma,\beta\delta}^{(2)}$ und $F_{\alpha\gamma,\beta\delta}^{(3)}$. Mit

$$\langle \alpha\gamma | g' | \beta\delta \rangle := \int_0^\infty dr g'(r) R_\alpha(r) R_\gamma(r) R_\beta(r) R_\delta(r) \quad (71)$$

erhält man als Resultat:

$$\begin{aligned}
 F_{\alpha\gamma,\beta\delta}^{(4)} &= \frac{9 \cdot \langle \alpha\gamma | g' | \beta\delta \rangle}{16\pi} \sum_{JMTT_3SL\ell} \begin{pmatrix} j_\alpha & j_\gamma & J \\ \Omega_\alpha & \Omega_\gamma & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_\beta & j_\delta & J \\ \Omega_\beta & \Omega_\delta & M \end{pmatrix} \times \\
 &\times \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & T \\ t_{\alpha 3} & t_{\gamma 3} & T_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & T \\ t_{\beta 3} & t_{\delta 3} & T_3 \end{pmatrix} (-1)^{\ell_\alpha + \ell_\beta + L + S + T} (2\ell + 1) \times \\
 &\times \dots
 \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned}
 & \times (2S+1)(2L+1)\sqrt{(2l_\alpha+1)(2l_\gamma+1)(2l_\beta+1)(2l_\delta+1)(2j_\alpha+1)} \times \\
 & \times \sqrt{(2j_\gamma+1)(2j_\beta+1)(2j_\delta+1)} \begin{pmatrix} l_\alpha & l_\gamma & l_\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_\gamma & l_\delta & l_\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \quad (72) \\
 & \times \begin{pmatrix} l_\alpha & l_\gamma & L \\ l_\delta & l_\beta & l \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 & 1/2 & S \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 & 1/2 & T \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 & l_\alpha & j_\alpha \\ 1/2 & l_\gamma & j_\gamma \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 & l_\beta & j_\beta \\ 1/2 & l_\delta & j_\delta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 & l_\beta & j_\beta \\ 1/2 & l_\delta & j_\delta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 & l_\delta & j_\delta \\ S & L & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 & l_\beta & j_\beta \\ S & L & J \end{Bmatrix} .
 \end{aligned}$$

Wir haben hiermit gezeigt, daß sich das Matrixelement $F_{\alpha\gamma,\beta\delta}$ in der Form

$$\begin{aligned}
 F_{\alpha\gamma,\beta\delta} =: & \sum_{JMTT_3} \begin{pmatrix} j_\alpha & j_\gamma & J \\ \Omega_\alpha & \Omega_\gamma & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_\beta & j_\delta & J \\ \Omega_\beta & \Omega_\delta & M \end{pmatrix} \times \\
 & \times \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & T \\ t_{\alpha 3} & t_{\gamma 3} & T_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & T \\ t_{\beta 3} & t_{\delta 3} & T_3 \end{pmatrix} \cdot F_{\alpha\gamma,\beta\delta}(J,T) \quad (73)
 \end{aligned}$$

darstellen läßt (vgl. Gl.n.(61),(65),(69),(72)).

Für die beabsichtigte Reduktion der Random-Phase-Gleichung müssen diese Matrixelemente noch umgekoppelt werden. Dies geschieht mit der folgenden Umkopplungsformel für die Clebsch-Gordan-Koeffizienten (Beweis im Anhang E):

$$\begin{aligned}
 \sum_M \begin{pmatrix} j_\alpha & j_\gamma & J \\ \Omega_\alpha & \Omega_\gamma & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_\beta & j_\delta & J \\ \Omega_\beta & \Omega_\delta & M \end{pmatrix} &= (2J+1) \cdot (-1)^{j_\alpha+j_\gamma+J} \times \\
 \times (-1)^{j_\alpha-\Omega_\alpha+j_\delta-\Omega_\delta} \sum_{J'M'} \begin{pmatrix} j_\beta & j_\alpha & J' \\ \Omega_\beta & -\Omega_\alpha & M' \end{pmatrix} \times \quad (74) \\
 \times \begin{pmatrix} j_\gamma & j_\delta & J' \\ \Omega_\gamma & -\Omega_\delta & M' \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} j_\beta & j_\delta & J \\ j_\gamma & j_\alpha & J' \end{Bmatrix} .
 \end{aligned}$$

Setzt man die in (61),(65),(69),(72) ein, so zeigt sich, daß man das Matrixelement $F_{\alpha\gamma,\beta\delta}$ wie folgt darstellen kann:

$$\begin{aligned}
 F_{\alpha\gamma,\beta\delta} &= (-1)^{j_\alpha-\Omega_\alpha+j_\delta-\Omega_\delta+1-t_{\alpha 3}-t_{\delta 3}} \times \\
 & \times \sum_{JMTT_3} \begin{pmatrix} j_\beta & j_\alpha & J \\ \Omega_\beta & -\Omega_\alpha & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_\gamma & j_\delta & J \\ \Omega_\gamma & -\Omega_\delta & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & T \\ t_{\beta 3} & -t_{\alpha 3} & T_3 \end{pmatrix} \times \quad (75) \\
 & \times \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & T \\ t_{\gamma 3} & -t_{\delta 3} & T_3 \end{pmatrix} \cdot \tilde{F}_{\alpha\gamma,\beta\delta}(J,T) .
 \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\alpha\gamma,\beta\delta}(J,T) &:= \sum_{J',T'} (2J'+1) \cdot (2T'+1) \times \\ &\times (-1)^{j_\alpha + j_\gamma + J' + T' + 1} \begin{Bmatrix} j_\beta & j_\delta & J' \\ j_\gamma & j_\alpha & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 & 1/2 & T' \\ 1/2 & 1/2 & T \end{Bmatrix} \times \\ &\times F_{\alpha\gamma,\beta\delta}(J',T') \quad . \end{aligned} \quad (76)$$

In dieser Darstellung läßt sich die Random-Phase-Gleichung reduzieren, da für die Dichtematrix gilt²⁶⁾:

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha\beta}^\lambda &= (-1)^{j_\alpha - \Omega_\alpha + 1/2 - t_{\alpha 3}} \begin{pmatrix} j_\beta & j_\alpha & J \\ \Omega_\beta & -\Omega_\alpha & M \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & T \\ t_{\beta 3} & -t_{\alpha 3} & T_3 \end{pmatrix} r_{\alpha\beta}^\lambda(J,T) \quad . \end{aligned} \quad (77)$$

Die nunmehr reduzierte Random-Phase-Gleichung lautet:

$$(\varepsilon_\lambda + \varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) r_{\alpha\beta}^\lambda(J,T) = z_\alpha z_\beta (n_\beta - n_\alpha) \cdot \tilde{F}_{\alpha\gamma,\beta\delta}(J,T) r_{\delta\gamma}^\lambda(J,T) \quad (78)$$

bzw.

$$\{(\varepsilon_\lambda + \varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - z_\alpha z_\beta (n_\beta - n_\alpha) \tilde{F}_{\alpha\gamma,\beta\delta}(J,T)\} r_{\delta\gamma}^\lambda(J,T) = 0 \quad . \quad (79)$$

Wenn man nun die Indexpaare (α,β) und (δ,γ) jeweils zu einem neuen Index zusammenfaßt, hat Gl.(79) die Gestalt einer Matrix-Eigenwertgleichung, wobei allerdings die Matrix nicht hermitesch ist. Wie man den Gln.(61),(65),(69),(72),(76) entnimmt, gelten für die Matrixelemente $\tilde{F}_{\alpha\gamma,\beta\delta}$ die Symmetriebeziehungen

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\alpha\gamma,\beta\delta}(J,T) &= \tilde{F}_{\beta\delta,\alpha\gamma}(J,T) \\ \tilde{F}_{\alpha\gamma,\beta\delta}(J,T) &= (-1)^{j_\alpha + j_\gamma + j_\beta + j_\delta} \tilde{F}_{\gamma\alpha,\delta\beta}(J,T) \quad . \end{aligned} \quad (80)$$

Man sieht leicht, daß sich die Eigenwertgleichung (79) mit

Hilfe der unitären Transformation U

$$\begin{aligned}
 U \cdot F_{\alpha\gamma, \beta\delta}(J, T) \cdot U^{-1} &:= (-1)^{j_\alpha + j_\delta + 1} F_{\alpha\gamma, \beta\delta}(J, T) \\
 U \cdot r_{\alpha\beta}^\lambda(J, T) &:= (-1)^{j_\alpha + 1/2} r_{\alpha\beta}^\lambda
 \end{aligned} \tag{81}$$

auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\lambda \\ Y^\lambda \end{pmatrix} = \epsilon_\lambda \begin{pmatrix} X^\lambda \\ Y^\lambda \end{pmatrix} \tag{82}$$

mit hermiteschen Matrizen A und B bringen läßt. Diese Form der Random-Phase-Gleichung ist bereits von Thouless²⁷⁾ untersucht worden.

In die Berechnung der Reaktionsamplitude gehen die Streuwellenfunktionen des einfallenden und des auslaufenden Teilchens ein (vgl. Gl. (53)). Für beide Streuwellenfunktionen gibt es eine Partialwellenzerlegung (vgl. Goldberger-Watson²⁸⁾ und Mott-Massey²⁹⁾:

$$\begin{aligned}
 \phi_{k(+)}(\vec{r}_1) &= \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\ell j \Omega m} i^\ell \cdot \exp(i \cdot \vec{\zeta}_{\ell j}^{\vec{t}_3}) \times \\
 &\times \begin{pmatrix} \ell & 1/2 & j \\ m & m_s & \Omega \end{pmatrix} R_{\ell j}^{\vec{t}_3}(kr_1; \eta) Y_{\ell j}^{\Omega}(1) \Xi(1/2 \vec{t}_3) Y_{\ell}^{m \times}(\hat{k})
 \end{aligned} \tag{83a}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_{k'}(-)(\vec{r}_2) &= \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\ell' j' \Omega' m'} i^{\ell'} \cdot \exp(-i \cdot \vec{\zeta}_{\ell' j'}^{\vec{t}_3'}) \times \\
 &\times \begin{pmatrix} \ell' & 1/2 & j' \\ m' & m'_s & \Omega' \end{pmatrix} R_{\ell' j'}^{\vec{t}_3'}(k'r_2; \eta') Y_{\ell' j'}^{\Omega'}(2) \Xi(1/2 \vec{t}_3') \times \\
 &\times Y_{\ell'}^{m' \times}(\hat{k}') .
 \end{aligned} \tag{83b}$$

Hier bedeutet $R_{\ell j}^{\vec{t}_3}(kr_1; \eta)$ den Radialanteil der Streuwellenfunktion der Partialwelle mit den Drehimpulsen ℓ, j , und

$$\zeta_{\ell j}^{\vec{t}_3} := \delta_{\ell j} + (1/2 - t_3) \cdot \sigma_\ell \qquad \delta_{\ell j} = \delta_{\ell j}(\eta) \tag{84}$$

ist die gesamte Streuphase (d.h. die Streuphase für die Summe aus dem Einteilchenpotential und dem Coulombpotential) dieser Partialwelle.

Wesentlich ist, daß die Radialanteile für Streuwellenfunktionen mit asymptotisch ein- und auslaufender Kugelwelle gleich sind (vgl. hierzu Goldberger-Watson²⁸⁾).

Die Radialanteile der Streuwellenfunktionen hängen auch von dem Ladungsfaktor

$$\eta := (Z \cdot Z' \cdot e^2) / (\hbar v) \quad (85)$$

ab, worin Z und Z' die Ladungszahlen des Geschoßteilchens und des Targets und v die Geschwindigkeit des Geschoßteilchens sind.

Im speziellen Fall, daß das einfallende Teilchen in Richtung der z -Achse fliegt ($\vec{k} \parallel z$ -Achse), geht Gl.(83a) über in

$$\begin{aligned} \phi_{k(+)}(\vec{r}_1) &= \frac{\sqrt{4\pi}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\ell j} i^{\ell} \cdot \sqrt{2\ell+1} \begin{pmatrix} \ell & 1/2 & j \\ 0 & m_s & m_s \end{pmatrix} \times \\ &\times R_{\ell j}^3(kr_1; \eta) Y_{\ell j}^{m_s}(1) E(1/2, t_3) \quad (83a') \end{aligned}$$

Wir wollen für das hier betrachtete Problem der inelastischen Nukleonenstreuung $\vec{k} \parallel z$ -Achse voraussetzen.

Die weitere Berechnung des Matrixelementes $F_{k'(-)\mu, \nu k(+)}$ bereitet nun keine Schwierigkeiten mehr, man kann analog wie bei der Reduktion der Random-Phase-Gleichung verfahren. Man erhält so

$$\begin{aligned} F_{k'(-)\mu, \nu k(+)} &= \sum_{jj' \ell \ell' m' \Omega' J M T T_3} i^{\ell} (-i)^{\ell'} \times \\ &\times \exp(i \cdot \{ \zeta_{\ell j}^3 + \zeta_{\ell' j'}^3 \}) \begin{pmatrix} \ell & 1/2 & j \\ 0 & m_s & m_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell' & 1/2 & j' \\ m' & m'_s & \Omega' \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} j' & j_{\mu} & J \\ \Omega' & \Omega_{\mu} & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{\nu} & j & J \\ \Omega_{\nu} & m_s & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & T \\ t_3^1 & t_{\mu 3} & T_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & T \\ t_{\nu 3} & t_3 & T_3 \end{pmatrix} \times \\ &\times F_{k' \mu, \nu k}(\ell', j', \ell, j; J, T, t_3^1, t_3) \cdot Y_{\ell'}^{m'}(\hat{k}') \quad (86) \end{aligned}$$

mit

$$F_{k',\mu,\nu k}(\ell',j',\ell,j;J,T,t_3^1,t_3^2) =$$

$$= \sum_{i=1}^4 F_{k',\mu,\nu k}^{(i)}(\ell',j',\ell,j;J,T,t_3^1,t_3^2) \quad (87)$$

und

$$F_{k',\mu,\nu k}^{(1)}(\ell',j',\ell,j;J,T,t_3^1,t_3^2) =$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot \langle k',\mu | f | \nu k \rangle_{\ell',j',\ell,j}^{t_3^1,t_3^2}}{(2\pi)^{5/2}} \sqrt{2\ell+1} \sum_{SLL'} (-1)^{\ell'+\ell_\nu+L} \times$$

$$\times (2L'+1)(2S+1)(2L+1) \sqrt{(2\ell'+1)(2\ell_\mu+1)(2\ell_\nu+1)(2\ell+1)} \times \quad (88)$$

$$\times \sqrt{(2j'+1)(2j_\mu+1)(2j_\nu+1)(2j+1)} \begin{pmatrix} \ell' & L' & \ell_\nu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_\mu & L' & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left\{ \begin{matrix} \ell' & \ell_\mu & L \\ \ell & \ell_\nu & L' \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & \ell' & j' \\ 1/2 & \ell_\mu & j_\mu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & \ell_\nu & j_\nu \\ 1/2 & \ell & j \end{matrix} \right\} ;$$

$$\langle k',\mu | f | \nu k \rangle_{\ell',j',\ell,j}^{t_3^1,t_3^2} := \int_0^\infty dr f(r) R_{\ell',j'}^{t_3^1}(k'r; \eta') R_\mu(r) \times$$

$$\times R_\nu(r) R_{\ell,j}^{t_3^2}(kr; \eta) ,$$

$$F_{k',\mu,\nu k}^{(2)}(\ell',j',\ell,j;J,T,t_3^1,t_3^2) =$$

$$= \frac{3 \cdot \langle k',\mu | f' | \nu k \rangle_{\ell',j',\ell,j}^{t_3^1,t_3^2}}{\sqrt{2} \cdot (2\pi)^{5/2}} \sqrt{2\ell+1} \sum_{SLL'} (-1)^{\ell'+\ell_\nu+L+T+1} \times$$

$$\times (2L'+1)(2S+1)(2L+1) \sqrt{(2\ell'+1)(2\ell_\mu+1)(2\ell_\nu+1)(2\ell+1)} \times \quad (89)$$

$$\times \sqrt{(2j'+1)(2j_\mu+1)(2j_\nu+1)(2j+1)} \begin{pmatrix} \ell' & L' & \ell_\nu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_\mu & L' & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left\{ \begin{matrix} \ell' & \ell_\mu & L \\ \ell & \ell_\nu & L' \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & 1/2 & T \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & \ell' & j' \\ 1/2 & \ell_\mu & j_\mu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & \ell_\nu & j_\nu \\ 1/2 & \ell & j \end{matrix} \right\} ;$$

$$\langle k',\mu | f' | \nu k \rangle_{\ell',j',\ell,j}^{t_3^1,t_3^2} := \int_0^\infty dr f'(r) R_{\ell',j'}^{t_3^1}(k'r; \eta') R_\mu(r) \times$$

$$\times R_\nu(r) R_{\ell,j}^{t_3^2}(kr; \eta) ,$$

$$\begin{aligned}
 F_{k'\mu, \nu k}^{(3)}(\ell', j', \ell, j; J, T, t_3^1, t_3^2) = \\
 = \frac{3 \cdot \langle k' \mu | g | \nu k \rangle_{\ell', j', \ell, j}^{t_3^1, t_3^2}}{\sqrt{2} \cdot (2\pi)^{5/2}} \sum_{SLL'} (-1)^{\ell' + \ell_\nu + L + S + 1} \times \\
 \times (2L' + 1)(2S + 1)(2L + 1) \sqrt{(2\ell' + 1)(2\ell_\mu + 1)(2\ell_\nu + 1)(2\ell + 1)} \times \\
 \times \sqrt{(2j' + 1)(2j_\mu + 1)(2j_\nu + 1)(2j + 1)} \begin{pmatrix} \ell' & L' & \ell_\nu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_\mu & L' & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\
 \times \left\{ \begin{matrix} \ell' & \ell_\mu & L \\ \ell & \ell_\nu & L' \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & 1/2 & S \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & \ell' & j' \\ 1/2 & \ell_\mu & j_\mu \\ S & L & J \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & \ell_\nu & j_\nu \\ 1/2 & \ell & j \\ S & L & J \end{matrix} \right\} ; \quad (90) \\
 \langle k' \mu | g | \nu k \rangle_{\ell', j', \ell, j}^{t_3^1, t_3^2} := \int_0^\infty dr \, g(r) R_{\ell', j}^{t_3^1}(k'r; \eta') R_\mu(r) \times \\
 \times R_\nu(r) R_{\ell, j}^{t_3^2}(kr; \eta) ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{k'\mu, \nu k}^{(4)}(\ell', j', \ell, j; J, T, t_3^1, t_3^2) = \\
 = \frac{9 \cdot \langle k' \mu | g' | \nu k \rangle_{\ell', j', \ell, j}^{t_3^1, t_3^2}}{2^{3/2} (2\pi)^{5/2}} \sum_{SLL'} (-1)^{\ell' + \ell_\nu + L + S + T} \times \\
 \times (2L' + 1)(2S + 1)(2L + 1) \sqrt{(2\ell' + 1)(2\ell_\mu + 1)(2\ell_\nu + 1)(2\ell + 1)} \times \quad (91) \\
 \times \sqrt{(2j' + 1)(2j_\mu + 1)(2j_\nu + 1)(2j + 1)} \begin{pmatrix} \ell' & L' & \ell_\nu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_\mu & L' & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\
 \times \left\{ \begin{matrix} \ell' & \ell_\mu & L \\ \ell & \ell_\nu & L' \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & 1/2 & S \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & 1/2 & T \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & \ell' & j' \\ 1/2 & \ell_\mu & j_\mu \\ S & L & J \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & \ell_\nu & j_\nu \\ 1/2 & \ell & j \\ S & L & J \end{matrix} \right\} , \\
 \langle k' \mu | g' | \nu k \rangle_{\ell', j', \ell, j}^{t_3^1, t_3^2} := \int_0^\infty dr \, g'(r) R_{\ell', j}^{t_3^1}(k'r; \eta') R_\mu(r) \times \\
 \times R_\nu(r) R_{\ell, j}^{t_3^2}(kr; \eta) .
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Umkopplungsformel für die Clebsch-Gordan-Koeffizienten kann man erreichen, daß die Drehimpulse von Teilchen und Löchern in Ein- und Ausgangskanal zum Gesamtdrehimpuls gekoppelt erscheinen. Hierzu setzen wir

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{k',\mu,\nu k}(\ell',j',\ell,j;J,T,t_3^1,t_3) &= \sum_{J',T'} (2J'+1)(2T'+1) \times \\ &\times (-1)^{j'+j_\mu+J'+T'+1} \begin{Bmatrix} j_\nu & j & J' \\ j_\mu & j & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 & 1/2 & T' \\ 1/2 & 1/2 & T \end{Bmatrix} \times \\ &\times F_{k',\mu,\nu k}(\ell',j',\ell,j;J,T,t_3^1,t_3) . \end{aligned} \quad (92)$$

Hiermit folgt:

$$\begin{aligned} F_{k'}(-)_{\mu,\nu k}(+) &= \sum_{\ell\ell'jj'm'\Omega'JMTT_3} i^{\ell}(-i)^{\ell'} \times \\ &\times \exp(i\{\zeta_{\ell j} t_3 + \zeta_{\ell' j'} t_3^1\}) \cdot (-1)^{j'-\Omega'+j-m_s+1-t_3^1-t_3} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \ell' & 1/2 & j' \\ m' & m_s' & \Omega' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & 1/2 & j \\ 0 & m_s & m_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_\nu & j' & J \\ \Omega_\nu & -\Omega' & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_\mu & j & J \\ \Omega_\mu & -m_s & M \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & T \\ t_{\nu 3} & -t_3^1 & T_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & T \\ t_{\mu 3} & -t_3 & T_3 \end{pmatrix} \times \\ &\times \tilde{F}_{k',\mu,\nu k}(\ell',j',\ell,j;J,T,t_3^1,t_3) \cdot Y_{\ell}^{m'}(k') . \end{aligned} \quad (93)$$

Somit haben wir eine dreihimpulsmäßige Zerlegung des direkten Anteils der Reaktionsamplitude erreicht. Wir wollen nun zeigen, daß sich der Resonanzterm in gleicher Weise zerlegen läßt.

Die Resonanzamplituden in Gl.(53) enthalten die Matrixelemente $F_{k'}(-)_{\gamma,\nu\delta}$ und $F_{k}(+)_{\beta,\mu\alpha}$. Diese Matrixelemente lassen sich ganz analog wie das Matrixelement $F_{k'}(-)_{\mu,\nu k}(+)$ berechnen. Man erhält:

$$\begin{aligned} F_{k'}(-)_{\gamma,\nu\delta} &= \sum_{\ell'j'm'\Omega'JMTT_3} (-i)^{\ell'} \exp(i\zeta_{\ell' j'} t_3^1) \times \\ &\times \begin{pmatrix} \ell' & 1/2 & j' \\ m' & m_s' & \Omega' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j' & j_\gamma & J \\ \Omega' & \Omega_\gamma & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_\nu & j_\delta & J \\ \Omega_\nu & \Omega_\delta & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & T \\ t_3^1 & t_{\gamma 3} & T_3 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & T \\ t_{\nu 3} & t_{\delta 3} & T_3 \end{pmatrix} F_{k',\gamma,\nu\delta}(\ell',j';J,T,t_3^1) \cdot Y_{\ell}^{m'}(\hat{k}') \end{aligned} \quad (94)$$

mit

$$F_{k',\gamma,\nu\delta}(\ell',j';J,T,t_3^i) = \sum_{i=1}^4 F_{k',\gamma,\nu\delta}^{(i)}(\ell',j';J,T,t^i) \quad (95)$$

und

$$\begin{aligned} F_{k',\gamma,\nu\delta}^{(1)}(\ell',j';J,T,t_3^i) &= \\ &= \frac{\langle k',\gamma | f | \nu\delta \rangle_{\ell',j',t_3^i}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{SLL'} (-1)^{\ell'+\ell_\nu+L} (2L'+1)(2S+1)(2L+1) \times \\ &\times \sqrt{(2\ell'+1)(2\ell_\gamma+1)(2\ell_\nu+1)(2\ell_\delta+1)(2j'+1)(2j_\gamma+1)(2j_\nu+1)} \times \\ &\times \sqrt{2j_\delta+1} \begin{pmatrix} \ell' & L' & \ell_\nu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_\gamma & L' & \ell_\delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ell' & \ell_\gamma & L \\ \ell_\delta & \ell_\nu & L' \end{Bmatrix} \times \\ &\times \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \ell' & j' \\ \frac{1}{2} & \ell_\gamma & j_\gamma \\ S & L & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \ell_\nu & j_\nu \\ \frac{1}{2} & \ell_\delta & j_\delta \\ S & L & J \end{Bmatrix} ; \end{aligned} \quad (96)$$

$$\langle k',\gamma | f | \nu\delta \rangle_{\ell',j',t_3^i} := \int_0^\infty dr f(r) R_{\ell',j',t_3^i}^i(k'r;\eta') R_\gamma(r) R_\nu(r) R_\delta(r) ,$$

$$\begin{aligned} F_{k',\gamma,\nu\delta}^{(2)}(\ell',j';J,T,t_3^i) &= \\ &= \frac{3 \cdot \langle k',\gamma | f' | \nu\delta \rangle_{\ell',j',t_3^i}}{2 \cdot (2\pi)^{3/2}} \sum_{SLL'} (-1)^{\ell'+\ell_\nu+L+T+1} (2L'+1)(2S+1) \times \\ &\times (2L+1) \sqrt{(2\ell'+1)(2\ell_\gamma+1)(2\ell_\nu+1)(2\ell_\delta+1)(2j'+1)(2j_\gamma+1)} \times \\ &\times \sqrt{(2j_\nu+1)(2j_\delta+1)} \begin{pmatrix} \ell' & L' & \ell_\nu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_\gamma & L' & \ell_\delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ell' & \ell_\gamma & L \\ \ell_\delta & \ell_\nu & L' \end{Bmatrix} \times \\ &\times \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & T \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \ell' & j' \\ \frac{1}{2} & \ell_\gamma & j_\gamma \\ S & L & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \ell_\nu & j_\nu \\ \frac{1}{2} & \ell_\delta & j_\delta \\ S & L & J \end{Bmatrix} ; \end{aligned} \quad (97)$$

$$\langle k',\gamma | f' | \nu\delta \rangle_{\ell',j',t_3^i} := \int_0^\infty dr f'(r) R_{\ell',j',t_3^i}^i(k'r;\eta') R_\gamma(r) R_\nu(r) R_\delta(r) ,$$

$$\begin{aligned}
 F_{k'\gamma, \nu\delta}^{(3)}(\ell', j'; J, T, t_3^1) &= \\
 &= \frac{3 \cdot \langle k'\gamma | g | \nu\delta \rangle_{\ell'j'}}{2 \cdot (2\pi)^{3/2}} \sum_{SLL'} (-1)^{\ell' + \ell_\nu + L + S + 1} (2L' + 1)(2S + 1) \times \\
 &\times (2L + 1) \sqrt{(2\ell' + 1)(2\ell_\gamma + 1)(2\ell_\nu + 1)(2\ell_\delta + 1)(2j' + 1)(2j_\gamma + 1)} \times \\
 &\times \sqrt{(2j_\nu + 1)(2j_\delta + 1)} \begin{pmatrix} \ell' & L' & \ell_\nu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_\gamma & L' & \ell_\delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} \ell' & \ell_\gamma & L \\ \ell_\delta & \ell_\nu & L' \end{matrix} \right\} \times \\
 &\times \left\{ \begin{matrix} 1/2 & 1/2 & S \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & \ell' & j' \\ 1/2 & \ell_\gamma & j_\gamma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & \ell_\nu & j_\nu \\ 1/2 & \ell_\delta & j_\delta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} S & L & J \end{matrix} \right\} ; \quad (98) \\
 \langle k'\gamma | g | \nu\delta \rangle_{\ell'j'}^{t_3^1} &:= \int_0^\infty dr \, g(r) R_{\ell'j'}^{t_3^1}(k'r; \eta') R_\gamma(r) R_\nu(r) R_\delta(r) ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{k'\gamma, \nu\delta}^{(4)}(\ell', j'; J, T, t_3^1) &= \\
 &= \frac{9 \cdot \langle k'\gamma | g' | \nu\delta \rangle_{\ell'j'}}{4 \cdot (2\pi)^{3/2}} \sum_{SLL'} (-1)^{\ell' + \ell_\nu + L + S + T} (2L' + 1) \times \\
 &\times (2S + 1)(2L + 1) \sqrt{(2\ell' + 1)(2\ell_\gamma + 1)(2\ell_\nu + 1)(2\ell_\delta + 1)(2j' + 1)} \times \\
 &\times \sqrt{(2j_\gamma + 1)(2j_\nu + 1)(2j_\delta + 1)} \begin{pmatrix} \ell' & L' & \ell_\nu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_\gamma & L' & \ell_\delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\
 &\times \left\{ \begin{matrix} \ell' & \ell_\gamma & L \\ \ell_\delta & \ell_\nu & L' \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & 1/2 & S \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & 1/2 & T \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{matrix} \right\} \times \quad (99) \\
 &\times \left\{ \begin{matrix} 1/2 & \ell' & j' \\ 1/2 & \ell_\gamma & j_\gamma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & \ell_\nu & j_\nu \\ 1/2 & \ell_\delta & j_\delta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} S & L & J \end{matrix} \right\} ; \\
 \langle k'\gamma | g' | \nu\delta \rangle_{\ell'j'}^{t_3^1} &:= \int_0^\infty dr \, g'(r) R_{\ell'j'}^{t_3^1}(k'r; \eta') R_\gamma(r) R_\nu(r) R_\delta(r) .
 \end{aligned}$$

Auch hier kann man mit Hilfe der Umkopplungsformel für die Clebsch-Gordan-Koeffizienten erreichen, daß die Drehimpulse der Zustände im Ausgangskanal zum Gesamtdrehimpuls gekoppelt werden. Mit

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{k', \gamma, \nu \delta}(\ell', j'; J, T, t_{\frac{1}{3}}) &:= \sum_{J', T'} (2J'+1)(2T'+1) \times \\ &\times (-1)^{j' + j_{\gamma} + J' + T' + 1} \left\{ \begin{matrix} j_{\nu} & j_{\delta} & J \\ j_{\gamma} & j' & J' \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & T \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & T' \end{matrix} \right\} \times \\ &\times F_{k', \gamma, \nu \delta}(\ell', j'; J', T', t_{\frac{1}{3}}) . \end{aligned} \quad (100)$$

Damit folgt dann

$$\begin{aligned} F_{k'(-)\gamma, \nu \delta} &= \sum_{\ell' j' m' \Omega' J M T T_{\frac{1}{3}}} (-1)^{\ell'} \exp(i\zeta_{\ell' j'}) \times \\ &\times (-1)^{j' - \Omega' + j_{\delta} - \Omega_{\delta} + 1 - t_{\frac{1}{3}} - t_{\delta \frac{1}{3}}} \left(\begin{matrix} \ell' & \frac{1}{2} \\ m' & m'_s \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j' \\ \Omega' \end{matrix} \right) \times \\ &\times \left(\begin{matrix} j_{\nu} & j' & J \\ \Omega_{\nu} & -\Omega' & M \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j_{\gamma} & j_{\delta} & J \\ \Omega_{\gamma} & -\Omega_{\delta} & M \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & T \\ t_{\nu \frac{1}{3}} & -t_{\frac{1}{3}} & T_{\frac{1}{3}} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T \\ T_{\frac{1}{3}} \end{matrix} \right) \times \\ &\times \left(\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & T \\ t_{\gamma \frac{1}{3}} & -t_{\delta \frac{1}{3}} & T_{\frac{1}{3}} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T \\ T_{\frac{1}{3}} \end{matrix} \right) \tilde{F}_{k', \gamma, \nu \delta}(\ell', j'; J, T, t_{\frac{1}{3}}) \cdot Y_{\ell'}^{m'}(\hat{k}') . \end{aligned} \quad (101)$$

Die Matrixelemente $F_{k(+)\beta, \mu \alpha}$ sind ganz analog strukturiert. Da aber der Index $k(+)$ für eine Streuwellenfunktion mit asymptotisch auslaufender Kugelwelle steht, ergibt sich ein anderer Phasenfaktor bei den einzelnen Summanden; ferner entfällt wegen der Annahme $\vec{k} \parallel z$ -Achse die Abhängigkeit von $\hat{k}$.

$$\begin{aligned} F_{k(+)\beta, \mu \alpha} &= \sum_{\ell j J M T T_{\frac{1}{3}}} (-i)^{\ell} \exp(-i\zeta_{\ell j}) (-1)^{j - m_s} \times \\ &\times (-1)^{j_{\alpha} - \Omega_{\alpha} + 1 - t_{\frac{1}{3}} - t_{\alpha \frac{1}{3}}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \left(\begin{matrix} \ell & \frac{1}{2} \\ 0 & m_s \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j \\ m_s \end{matrix} \right) \times \\ &\times \left(\begin{matrix} j_{\mu} & j & J \\ \Omega_{\mu} & -m_s & M \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j_{\beta} & j_{\alpha} & J \\ \Omega_{\beta} & -\Omega_{\alpha} & M \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & T \\ t_{\mu \frac{1}{3}} & -t_{\frac{1}{3}} & T_{\frac{1}{3}} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T \\ T_{\frac{1}{3}} \end{matrix} \right) \times \\ &\times \left(\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & T \\ t_{\beta \frac{1}{3}} & -t_{\alpha \frac{1}{3}} & T_{\frac{1}{3}} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T \\ T_{\frac{1}{3}} \end{matrix} \right) \tilde{F}_{k\beta, \mu \alpha}(\ell, j; J, T, t_{\frac{1}{3}}) . \end{aligned} \quad (102)$$

Damit haben wir die Reduktion sämtlicher Matrixelemente durchgeführt, die wir zur Berechnung der Reaktionsamplitude und der Zerfallsbreiten der Compound-Zustände benötigen.

Man kann nun die Breiten der Compound-Zustände durch die reduzierten Matrixelemente und die Lösungen der reduzierten Random-Phase-Gleichung ausdrücken. Aus (52) ergibt sich bei Benutzung von (77) und (102) wegen der Orthogonalitätsrelationen für die Clebsch-Gordan-Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \gamma_{\lambda}(J,T) &= \frac{2m\pi z^3}{\hbar^2 \|r^{\lambda}(J,T)\|^2} \sum_{\nu} \sum_{t_3} k \cdot \left(\begin{array}{cc|c} 1/2 & 1/2 & T \\ t_{\nu 3} & -t_3 & t_{\nu 3} - t_3 \end{array} \right)^2 \times \\ &\times \sum_{\ell} \sum_j |\tilde{P}_{k\beta, \nu\alpha}(\ell, j; J, T, t_3) \cdot r_{\alpha\beta}^{\lambda}(J, T)|^2_{k=\kappa} \\ \kappa &:= \sqrt{2\bar{m}\{E_{\lambda}(J, T) - E_{\nu}\} / \hbar^2} \\ \bar{m} &:= (m_p + m_n) / 2 \end{aligned} \quad (103)$$

Für den Teilchen-Loch-Anteil der Reaktionsamplitude bzw. für die Reaktionsamplitude für inelastische Streuung von Nukleonen an Ein-Loch-Kernen erhält man

$$\begin{aligned} f_{k'k}^{\nu\mu}(TL) &= \sum_{\ell\ell'jj'm'\Omega'JMTT_3} (-1)^{j'-\Omega'+1/2-t'_3} \times \\ &\times (-1)^{j-m_s+1/2-t_3} \left(\begin{array}{cc|c} \ell' & 1/2 & j' \\ m' & m'_s & \Omega' \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} \ell & 1/2 & j \\ 0 & m_s & m_s \end{array} \right) \times \\ &\times \left(\begin{array}{cc|c} j_{\nu} & j' & J \\ \Omega_{\nu} & -\Omega' & M \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} j_{\mu} & j & J \\ \Omega_{\mu} & -m_s & M \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1/2 & 1/2 & T \\ t_{\nu 3} & -t'_3 & T_3 \end{array} \right) \times \\ &\times \left(\begin{array}{cc|c} 1/2 & 1/2 & T \\ t_{\mu 3} & -t_3 & T_3 \end{array} \right) f_{k'k}^{\nu\mu}(TL | \ell', j', t'_3, \ell, j, t_3; J, T) \cdot Y_{\ell}^{m'}(\hat{k}') \end{aligned} \quad (104)$$

wobei die reduzierte Reaktionsamplitude durch

$$\begin{aligned}
 f_{k',k}^{\nu\mu}(TL|\ell',j',t_3',\ell,j,t_3;J,T) &:= \\
 &:= -\frac{2m\sqrt{z}}{4\pi\hbar^2} \mu^z \nu(-i)^{\ell'} i^{\ell} \exp(i\{\zeta_{\ell',j'}^{t_3'} + \zeta_{\ell,j}^{t_3}\}) \times \\
 &\times \left\{ \tilde{F}_{k',\mu,\nu k}(\ell',j',\ell,j;J,T,t_3',t_3) + \right. \quad (105) \\
 &+ \sum_{\lambda>0} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + E_{\mu} - E_{\lambda}(J,T) + i \cdot \frac{\gamma_{\lambda}(J,T)}{2} \right)^{-1} \times \\
 &\times \left(\tilde{F}_{k',\alpha,\nu\beta}(\ell',j';J,T,t_3') \cdot r_{\beta\alpha}^{\lambda}(J,T) \times \right. \\
 &\left. \times F_{k\gamma,\mu\delta}^{\times}(\ell,j;J,T,t_3) \cdot r_{\delta\gamma}^{\lambda\times}(J,T) \right) \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

Dies ist die Partialwellenzerlegung des Teilchen-Loch-Anteiles der Reaktionsamplitude bzw. der Reaktionsamplitude für die inelastische Streuung von Nukleonen an Ein-Loch-Kernen. Gleichzeitig haben wir eine Reduktion dieser Reaktionsamplitude bezüglich des Drehimpulses, des Isospins und der Parität der Compound-Zustände erreicht. In allen unseren Formeln haben wir die Parität als Variable weggelassen, da wir uns bei der hier betrachteten Reaktion $^{15}\text{N}(p,n)^{15}\text{O}$ auf die Compound-Zustände mit negativer Parität beschränken werden. Die Zustände mit positiver Parität bei ^{16}O lassen sich nicht mehr befriedigend als Teilchen-Loch-Zustände beschreiben.

Im Falle der elastischen Streuung trägt auch die Potentialstreuung zur Reaktionsamplitude bei. Man hat dann die Streuamplitude für die Potentialstreuung zu (104) zu addieren, um die Reaktionsamplitude für die elastische Streuung von Nukleonen an Ein-Loch-Kernen zu erhalten. Die Streuamplitude für die Potentialstreuung läßt sich in bekannter Weise durch die Streuphasen ausdrücken²⁸⁾.

Bei der Berechnung des totalen Wirkungsquerschnittes für die inelastische Streuung von Nukleonen an Ein-Loch-Kernen mitteln wir über die magnetischen Quantenzahlen

des Targets sowie über die Polarisationen des einfallenden und des auslaufenden Teilchens. Mit Hilfe der Unitaritätsrelationen für die Clebsch-Gordan-Koeffizienten erhält man dann

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{k'}{4 \cdot k \cdot (2j_\mu + 1)(2j_\nu + 1)} \sum_{\ell j \ell' j' J T T'} \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & T \\ t_{\nu 3} & -t_3' & t_{\nu 3} - t_3' \end{array} \right) \times \\ & \times \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & T' \\ t_{\nu 3} & -t_3' & t_{\nu 3} - t_3' \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & T \\ t_{\mu 3} & -t_3 & t_{\mu 3} - t_3 \end{array} \right) \times \\ & \times \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & T' \\ t_{\mu 3} & -t_3 & t_{\mu 3} - t_3 \end{array} \right) \frac{2J+1}{2\ell+1} f_{k'k}^{\nu\mu x}(TL|\ell', j', \ell, j; J, T, t_3', t_3) \times \\ & \times f_{k'k}^{\nu\mu}(TL|\ell', j', \ell, j; J, T', t_3', t_3) . \end{aligned} \quad (106)$$

Dabei ist k die Wellenzahl des einfallenden und k' die des auslaufenden Teilchens.

5. Zusammenhang zwischen der Schalenmodell-Theorie für Kernreaktionen und der Methode der gekoppelten Kanäle

Wie man aus Gl.(33) ersieht, besteht das wesentliche Problem bei der Schalenmodell-Theorie für Kernreaktionen in der Berechnung der linearen Antwortfunktion. Für die lineare Antwortfunktion gilt nach (45) die Integralgleichung

$$\begin{aligned} R_{k'(-)\mu, \nu k(+)}(\hat{\omega}) &= -i \cdot s_{k'k} \cdot \delta_{\mu\nu} \cdot \Lambda_{k'(-)\nu}(\hat{\omega}) + \\ &+ \Lambda_{k'(-)\nu}(\hat{\omega}) \cdot F_{k'(-)\rho, \nu\sigma} \cdot R_{\sigma\mu, \rho k(+)}(\hat{\omega}) . \end{aligned} \quad (107)$$

Unter der Annahme, daß der Grundzustand des magischen Compound-Kernes keine Kontinuumsbeimischungen enthält, folgt aus (107) und (39) die Beziehung

$$\begin{aligned} \langle 0 | a_{\nu}^{\dagger} a_{k'(-)}(\hat{\omega} - H + E_0 + i0)^{-1} a_{k(+)}^{\dagger} a_{\mu} | 0 \rangle &= \\ &= s_{k'k} \cdot \delta_{\mu\nu} \cdot \Lambda_{k'(-)\nu}(\hat{\omega}) + \Lambda_{k'(-)\nu}(\hat{\omega}) \cdot F_{k'(-)\rho, \nu\sigma} \times \\ &\times \langle 0 | a_{\rho}^{\dagger} a_{\sigma}(\hat{\omega} - H + E_0 + i0)^{-1} a_{k(+)}^{\dagger} a_{\mu} | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (108)$$

Da die Spektraldarstellung des Teilchen-Loch-Propagators Λ bekannt ist (vgl. Gl.(47)), folgt aus (108)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\hbar^2 k'^2}{2m'} + E_{\nu} - \hat{\omega} \right) \langle 0 | a_{\nu}^{\dagger} a_{k'(-)}(\hat{\omega} - H + E_0 + i0)^{-1} a_{k(+)}^{\dagger} a_{\mu} | 0 \rangle &= \\ &= z_{\nu} \cdot s_{k'k} \cdot \delta_{\mu\nu} + z_{\nu} \cdot F_{k'(-)\rho, \nu\sigma} \times \\ &\times \langle 0 | a_{\rho}^{\dagger} a_{\sigma}(\hat{\omega} - H + E_0 + i0)^{-1} a_{k(+)}^{\dagger} a_{\mu} | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (109)$$

Andererseits ist $a_{k',(\pm)}^{\dagger} a_{\nu} | 0 \rangle = | k'\nu \rangle_0^{(\pm)}$ ein Eigenzustand des Schalenmodell-Hamiltonoperators H_0 mit dem Eigenwert $(\hbar^2 k'^2 / 2m') + E_{\nu}$ (vgl. Gl.(7)). Damit erhalten wir aus (109):

$$\begin{aligned} (-)_0 \langle k'\nu | (H_0 - \hat{\omega})(\hat{\omega} - H + E_0 + i0)^{-1} | k\mu \rangle_0^{(+)} &= z_{\nu} \cdot s_{k'k} \cdot \delta_{\mu\nu} + \\ &+ z_{\nu} \cdot F_{k'(+)\rho, \nu\sigma} \cdot \langle 0 | a_{\rho}^{\dagger} a_{\sigma}(\hat{\omega} - H + E_0 + i0)^{-1} | k\mu \rangle_0^{(+)} . \end{aligned} \quad (110)$$

Der exakte Streuzustand $|k\mu\rangle^{(+)}$ ist nach Gl.(13) gegeben durch

$$|k\mu\rangle^{(+)} = i0 \cdot (\hat{\omega} - H + E_0 + i0)^{-1} |k\mu\rangle_0^{(+)} \quad (111)$$

$$\hat{\omega} = (\hbar^2 k^2 / 2m) - \epsilon_\mu$$

Daher erhalten wir aus (110)

$$\begin{aligned} {}^{(-)}\langle k'v | (H_0 - E_0 - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + E_\mu) | k\mu \rangle^{(+)} &= z_v \cdot F_{k'}^{(-)} \rho, v\sigma \times \\ \times \langle 0 | a_\rho^\dagger a_\sigma | k\mu \rangle^{(+)} &= z_v \cdot F_{k'}^{(-)} \rho, v\sigma \cdot \langle \sigma \rho | k\mu \rangle^{(+)} . \end{aligned} \quad (112)$$

Das Matricelement

$$F_{k'}^{(-)} \rho, v\sigma := {}^{(-)}\langle k' \rho | F | v\sigma \rangle \quad (113)$$

kann nun umgekoppelt werden (vgl. Anhang E) zu

$$F_{k'}^{(-)} \rho, v\sigma := {}^{(-)}\langle k'v | \tilde{F} | \sigma \rho \rangle , \quad (114)$$

und es folgt aus Gl.(112)

$$\begin{aligned} (H_0 - E_0 - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + E_\mu) | k\mu \rangle^{(+)} &= z_v \cdot \tilde{F} | k\mu \rangle^{(+)} = \\ &= {}^{(+)}\langle k'v | \tilde{F} | k\mu \rangle^{(+)} \cdot z_v \cdot | k'v \rangle^{(+)} . \end{aligned} \quad (115)$$

Dabei wird über v und k' summiert bzw. integriert. Gl.(115) ist das System von Gleichungen für die Methode der gekoppelten Kanäle³⁰⁾.

Wir haben also gezeigt, daß die Integralgleichung für die lineare Antwortfunktion auf das System von Gleichungen für die Methode der gekoppelten Kanäle führt.

6. Numerische Durchführung und Ergebnisse

Bei der numerischen Auswertung der Theorie wurde eine Migdalsche Wechselwirkung²²⁾

$$F(\vec{r}_\alpha, \vec{r}_\beta; \vec{r}_\gamma, \vec{r}_\delta) = \{f(r_\alpha) + f'(r_\alpha)(\vec{t}_\alpha \cdot \vec{t}_\beta) + (g(r_\alpha) + g'(r_\alpha) \times (\vec{t}_\alpha \cdot \vec{t}_\beta))(\vec{\sigma}_\alpha \cdot \vec{\sigma}_\beta)\} \delta(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\gamma) \delta(\vec{r}_\beta - \vec{r}_\delta) \delta(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \quad (116)$$

zugrunde gelegt. Die Funktionen f, f', g und g' sind dabei lineare Funktionen der Dichte

$$\begin{aligned} f(r) &= C_F \cdot \{f_{ex} + (f_{in} - f_{ex}) \frac{\rho(r)}{\rho(0)}\} ; f_{ex} = -3.10, f_{in} = 0.95 \\ f'(r) &= C_F \cdot \{f'_{ex} + (f'_{in} - f'_{ex}) \frac{\rho(r)}{\rho(0)}\} ; f'_{ex} = 0.0, f'_{in} = 0.30 \\ g(r) &= C_F \cdot \{g_{ex} + (g_{in} - g_{ex}) \frac{\rho(r)}{\rho(0)}\} ; g_{ex} = 0.5, g_{in} = 0.5 \quad (117a) \\ g'(r) &= C_F \cdot \{g'_{ex} + (g'_{in} - g'_{ex}) \frac{\rho(r)}{\rho(0)}\} ; g'_{ex} = 0.2, g'_{in} = 0.2 \end{aligned}$$

$$\rho(r) = (1 + \exp(\frac{r - R_0}{a_s}))^{-1} ; R_0 = 2.696 \text{ fm}, a_s = 0.5 \text{ fm},$$

und für die Konstante C_F wählten wir den Wert³¹⁾

$$C_F = 386.039 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^3. \quad (117b)$$

Für die Wellenfunktionen der gebundenen Einteilchen- und Ein-Loch-Zustände verwendeten wir die Eigenfunktionen eines harmonischen Oszillators. Der Radialanteil dieser Wellenfunktionen ist gegeben durch

$$R_\alpha(r_\alpha) := \sqrt{\frac{2(n_\alpha - 1)!}{\Gamma(n_\alpha + \ell_\alpha + 1/2) \cdot \varnothing^3}} \left(\frac{r_\alpha}{\varnothing}\right)^{\ell_\alpha} L_{n_\alpha - 1}^{\ell_\alpha + 1/2} \left(\frac{r_\alpha^2}{\varnothing^2}\right) \quad (118)$$

$$\varnothing := \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \sqrt{\frac{41.467 \text{ MeV}}{\hbar\omega}} \quad \hbar\omega = 13.14 \text{ MeV},$$

wobei die verallgemeinerten Laguerre-Polynome durch

$$L_k^m(x) := \sum_{n=0}^k \frac{\Gamma(k+m+1)}{\Gamma(n+m+1)} \frac{(-x)^n}{n!(k-n)!} \quad (119)$$

gegeben sind. Die Wellenfunktionen der Protonen- und Neutronenzustände unterscheiden sich nur durch den Isospinanteil; diese

Näherung ("guter Isospin") ist nur für die gebundenen Zustände bei leichten Kernen gerechtfertigt²⁴⁾. Für die Einteilchen- bzw. Ein-Loch-Energien $\epsilon_\alpha, \epsilon_\beta$ verwendeten wir die Werte^{33,34)}

$n \ell j \quad t_3 = 1/2$	Spektroskopische Bezeichnung	ϵ [MeV]	
0 2 $3/2$	$1d_{3/2}$	0.93	Teilchen
1 0 $1/2$	$2s_{1/2}$	-3.28	
0 2 $5/2$	$1d_{5/2}$	-4.15	
0 1 $1/2$	$1p_{1/2}$	-15.60	Löcher
0 1 $3/2$	$1p_{3/2}$	-21.74	

Den $1d_{3/2}$ -Zustand - ein diskreter Zustand (Resonanzzustand) im Kontinuum - haben wir ebenfalls durch einen Oszillatorzustand approximiert. Die Begründung für dieses Vorgehen findet sich in der Theorie von Unger und Balashov³⁵⁾ zur Behandlung der Einteilchen-Resonanzen (vgl. Anhang C).

Für die Renormierungskonstanten z_α, z_β wählten wir bei den gebundenen Zuständen den festen Wert $z=0.8$, für die Zustände aus dem Kontinuum - also auch für den $1d_{3/2}$ -Zustand - wählten wir $z=1$.

Das Diagonalisieren der nichthermiteschen Matrix in Gl.(82) geschah nach dem Verfahren von Eberlein³⁶⁾, einer Variante des Jacobischen Verfahrens. Mit der Methode von Eberlein lassen sich beliebige quadratische Matrizen mit reellen Elementen diagonalisieren, sofern sie überhaupt Eigenwerte besitzen.

Durch die obige Wahl der Parameter wurden die Zustände mit negativer Parität bei ^{16}O optimal wiedergegeben (Abb.1). Die Zustände mit positiver Parität bei ^{16}O lassen sich nicht mehr als Teilchen-Loch-Anregungen beschreiben und wurden daher nicht berücksichtigt. Die nachfolgende Tabelle vergleicht die berechneten Energien mit dem Experiment und den Ergebnissen aus anderen Rechnungen.

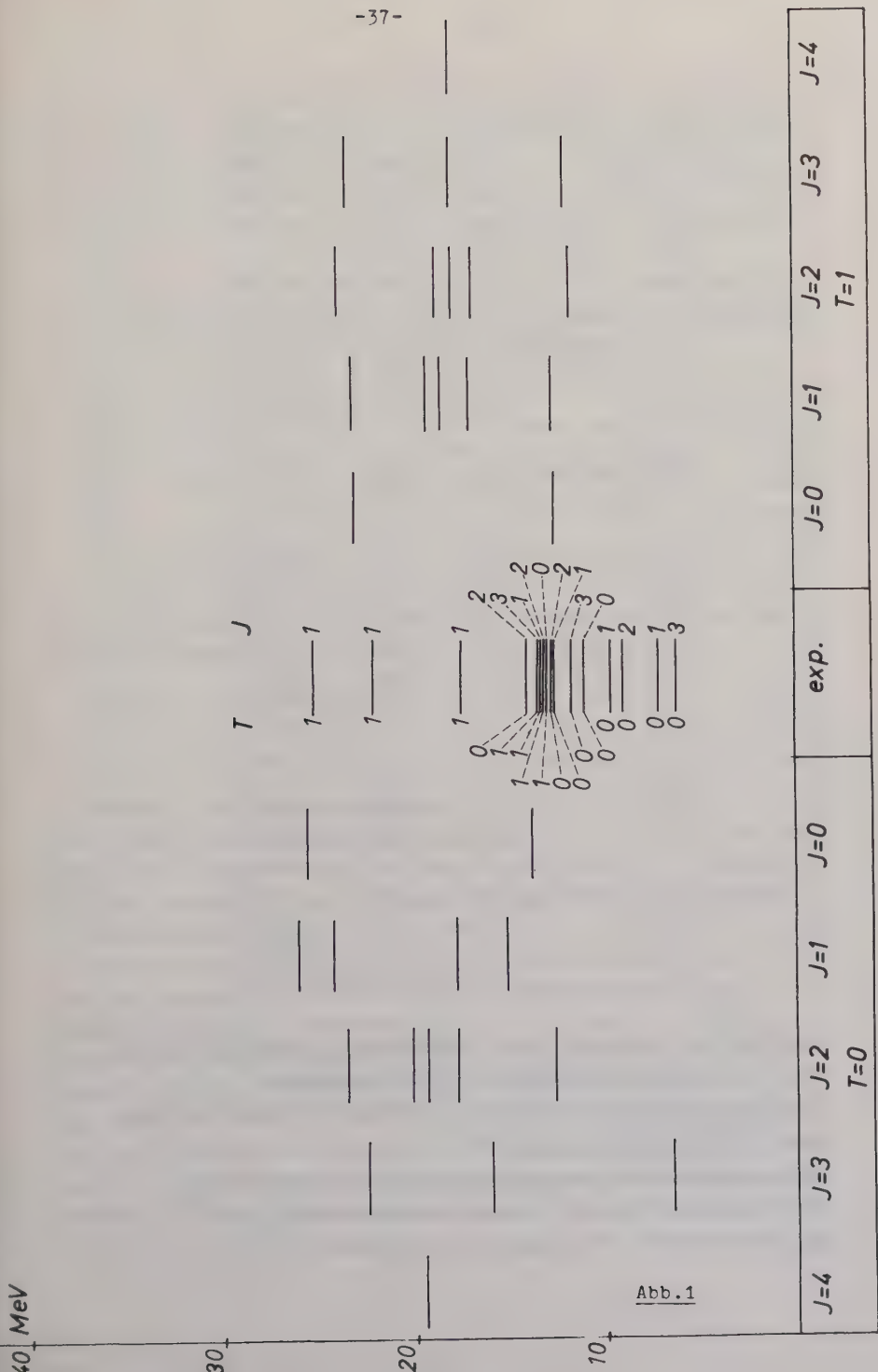


Abb. 1

J	T	MI	EXP	KK	HJ	PU
0	0	13.67 25.40	10.94	13.34 25.37	9.93 18.79	12.92 24.20
1	0	11.6i 15.04 17.76 19.08 24.08 25.87	7.12 9.58 12.43	8.8i 10.66 16.92 18.09 24.33	8.0i 9.76 18.28 20.06 26.16	10.2i 10.99 16.73 17.94 23.54
2	0	12.52 17.60 19.08 19.94 23.35	8.88 12.52 13.97	12.31 16.77 18.59 19.75 23.22	11.62 16.08 17.36 19.62 22.55	11.95 15.65 17.66 19.18 22.92
3	0	6.31 15.91 22.23	6.14 11.62	7.09 16.18 21.97	7.14 16.66 22.55	6.58 16.22 21.15
4	0	19.28		18.78	18.80	17.74
0	1	12.46 22.96	12.78	13.93 26.94	13.40 25.49	13.90 27.29
1	1	12.65 16.81 18.39 19.12 22.91	13.1 17.3 ? 22 25	14.07 18.10 20.31 23.17 26.14	13.52 17.73 20.87 23.75 25.43	14.11 18.13 20.49 24.23 26.89
2	1	11.59 16.67 17.72 18.60 22.73	12.96	13.21 17.98 19.43 20.86 23.95	13.36 16.85 19.00 20.57 24.28	13.29 18.45 19.41 21.18 24.07
3	1	11.76 17.78 23.07	13.26	13.22 18.47 24.94	13.66 18.91 25.22	13.59 19.03 25.53
4	1	17.77		19.59	18.83	19.54

Energien der Teilchen-Loch-Zustände mit negativer Parität bei ^{16}O . Alle Energien sind in MeV angegeben.

MI: Random-Phase-Rechnung mit Migdalscher Wechselwirkung (diese Arbeit)

EXP: Experimentelle Werte^{33,37)}

KK: Brueckner-Theorie (Kallio-Kolltveit-Potential)³³⁾

HJ: Brueckner-Theorie (Hamada-Johnston-Potential)³³⁾

PU: Random-Phase-Rechnung mit Puff-Potential³⁸⁾

Die berechneten T=0-Zustände liegen überwiegend zu hoch in der Energie. Dies kann teilweise dadurch erklärt werden, daß die niedrig liegenden Anregungszustände in ^{16}O zum Teil beträchtliche 3 Teilchen-3 Loch-Beimischungen enthalten³⁹⁾. Bei den T=1-Zuständen ist die Übereinstimmung mit dem Experiment besser.

Für die Berechnung der Breiten (vgl. Gl. (52)) benötigt man die Einteilchen-Streuwellenfunktionen. Diese erhält man durch numerische Integration der Differentialgleichung

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{k^2}{E} (E - V(r) - \frac{\hbar^2 \cdot \vec{s} \cdot \vec{\sigma}}{4\pi^2 r} \frac{dV(r)}{dr} - (\frac{1}{2} - t_3) e\phi(r)) \right] u_{lj}^t(r) =$$

$$= \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{k^2}{E} \left(E - V(r) - \frac{j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}}{r} \frac{dV(r)}{dr} - (\frac{1}{2} - t_3) e\phi(r) \right) \right] u_{lj}^t(r) = 0$$

$$; \quad u_{lj}^t(r) = r \cdot R_{lj}^t(kr; \eta)$$

nach der Cowell-Methode⁴⁰⁾, wobei wir für das Kernpotential $V(r)$ ein Saxon-Woods-Potential

$$V(r) = -V_0 \cdot \left(1 + \exp\left(\frac{r - R_S}{a_S}\right) \right)^{-1} \quad (121)$$

$R_S = 3.08 \text{ fm} \quad a_S = 0.53 \text{ fm}$

verwandten. Mit diesen Parametern wurde erreicht, daß sich der Verlauf des Saxon-Woods-Potentials für $r \leq 5 \text{ fm}$ nur geringfügig von dem des Oszillatorpotentials unterscheidet (Abb. 2). Für das Coulombpotential setzten wir konstante Ladungsdichte im Kerninneren voraus.

Bei der Berechnung der Breiten ist es ferner sinnvoll, bei den Energien E_v in (51) und (52) für Protonen- und Neutronenzustände verschiedene Werte einzusetzen. Damit wird der Tatsache Rechnung getragen, daß die Schwellen für Nukleon-Emission für Protonen und Neutronen verschieden sind. Wir haben die Energien der Protonenzustände gegenüber denen der Neutronenzustände (vgl. Gl. (51) und die Tabelle auf S. 36) um die Differenz der Schwellen für Protonen- und Neutronenemission⁴¹⁾ bei ^{16}O verschoben:

$$E_v(p) = E_v(n) + \Delta_{pn} \quad \Delta_{pn} = -3.5 \text{ MeV} \quad (122)$$

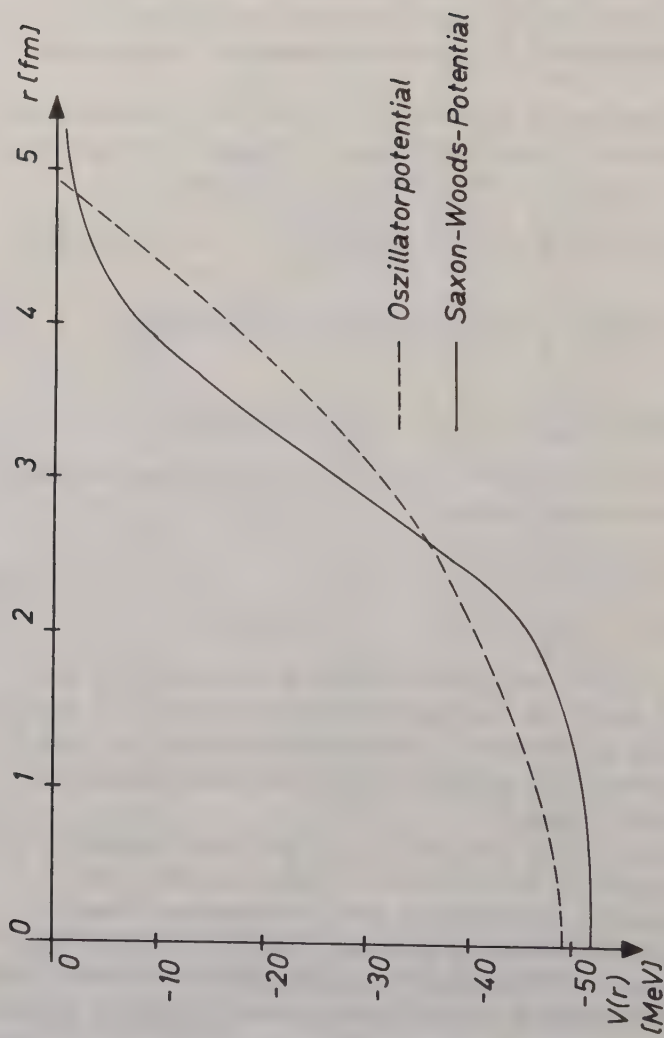
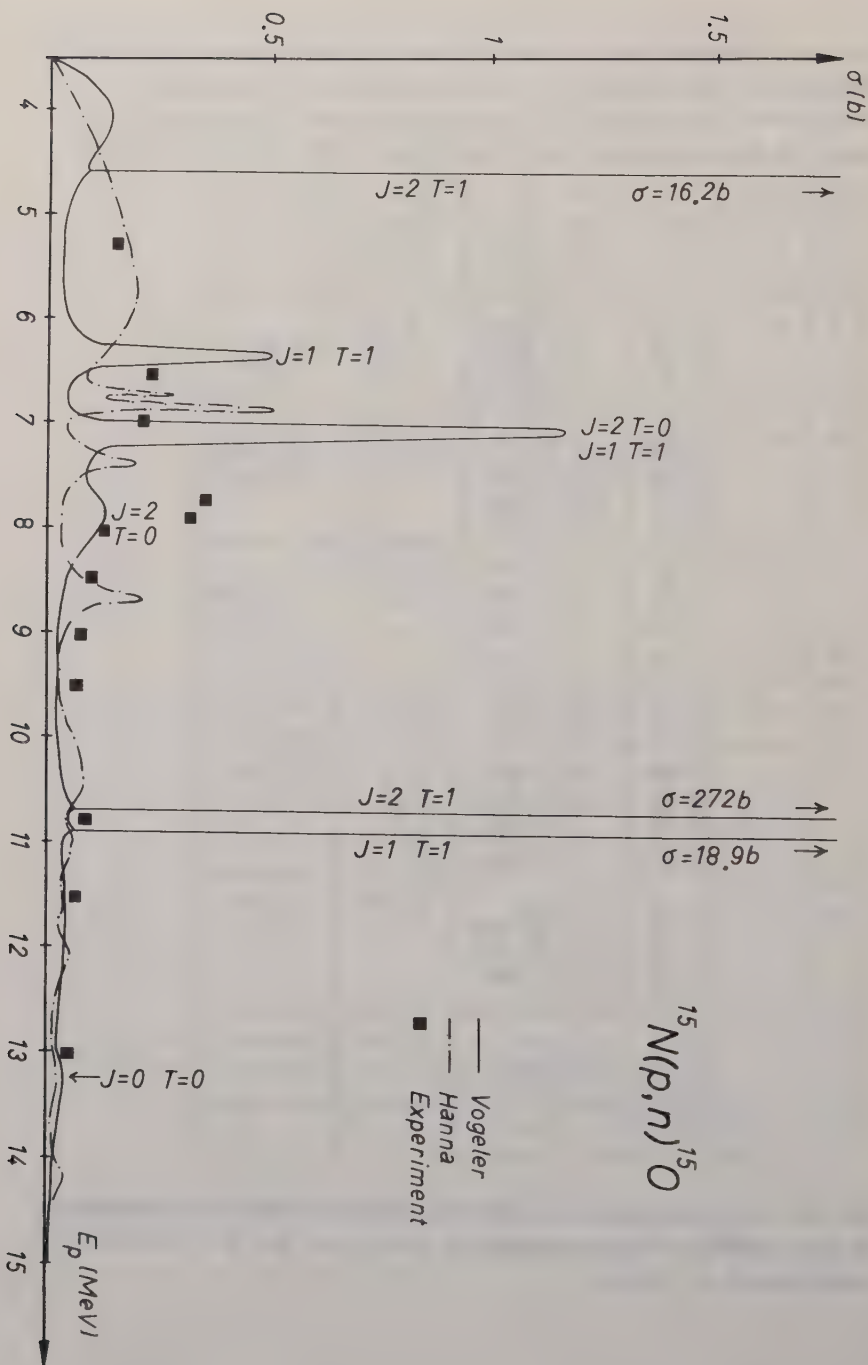


Abb. 2

Die nachfolgende Tabelle vergleicht die berechneten Zerfallsbreiten für die Teilchen-Loch-Zustände bei ^{16}O mit den experimentellen Werten⁴¹⁾; die Energien der Zustände sind dabei in MeV angegeben. Alle Zustände haben negative Parität.

J	T	E_{th}	γ_{th}	E_{exp}	γ_{exp}
0	0	13.67 25.40	33.9 keV 119.6 keV	10.94	
1	0	15.04 17.76 24.08 25.87	0.76 keV 31.9 keV 1.34 MeV 149.9 MeV	7.12 9.58 12.43	650 keV 88 keV
2	0	12.52 17.60 19.08 19.94 23.35	9.3 eV 890 keV 34.5 keV 320.5 keV 160.9 keV	8.88 12.52 13.97	0.8 keV 22 keV
3	0	6.31 15.91 22.23	0.0 keV 0.93 keV 5.34 MeV	6.14 11.62	1.2 MeV
4	0	19.28	0.71 eV		
0	1	12.46 22.96	84.7 eV 13.3 keV	12.78	38 keV
1	1	12.65 16.81 18.39 19.12 22.91	29.6 eV 1.19 keV 8.18 keV 69.1 keV 1.76 keV	13.1 17.3 ? 22 25	130 keV 260 keV
2	1	11.59 16.67 17.72 18.60 22.73	< 1 eV 0.38 keV 1.13 keV 179.2 keV 55 eV	12.96	2 keV
3	1	11.76 17.78 23.07	< 1 eV 329 keV 3.9 keV	13.26	21 keV
4	1	17.77	< 1 eV		

Für die T=0-Zustände sind die berechneten Breiten im Vergleich zu den gemessenen überwiegend zu groß, bei den T=1-Zuständen überwiegend zu klein.



Bei der Berechnung des Wirkungsquerschnittes für die Kernreaktion $^{15}\text{N}(\text{p},\text{n})^{15}\text{O}$ nahmen wir an, daß sich Anfangs- und Endzustand des Targetkerns durch die folgenden Schalenmodell-Loch-Zustände beschreiben lassen:

Anfangszustand μ : $1\text{p}^{1/2}$ (Protonenloch) $E_{\mu}=12.10 \text{ MeV}$

Endzustand ν : $1\text{p}^{1/2}$ (Neutronenloch) $E_{\nu}=15.60 \text{ MeV}$.

Der Targetkern befindet sich also vor und nach der Reaktion im Grundzustand.

Abb.3 zeigt den berechneten Wirkungsquerschnitt als Funktion der Einschußenergie des Protons und vergleicht die Ergebnisse mit denen von Hanna⁴²⁾ und dem Experiment. Die experimentellen Punkte sind der Arbeit von Hanna⁴²⁾ entnommen.

Wie nach der Diskussion der Gl.(53) zu erwarten war, liefert die Theorie einen zu geringen Untergrund im Wirkungsquerschnitt, was sich jedoch nicht allein aus der Vernachlässigung des zweiten Termes in der linearen Antwortfunktion (39) erklären läßt. Die Ergebnisse scheinen vielmehr dafür zu sprechen, daß das Konzept einer energieunabhängigen Teilchen-Loch-Wechselwirkung aufgegeben werden muß, sobald man das Kontinuum in die Theorie einbezieht.

Anhang A: Green-Funktionen

Eine Einteilchen-Green-Funktion ist definiert durch¹⁵⁾

$$G_{\alpha\beta}(t, t') := (-i) \langle 0 | T \{ a_{\alpha}(t) a_{\beta}^{\dagger}(t') \} | 0 \rangle . \quad (A.1)$$

Dabei ist $|0\rangle$ der exakte Grundzustand des Systems: $H|0\rangle = E_0|0\rangle$. Die Operatoren $a_{\alpha}(t)$ bzw. $a_{\beta}^{\dagger}(t')$ sind die Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperatoren für ein Teilchen im Zustand α bzw. β in der Heisenbergdarstellung. Das zeitgeordnete Produkt der Operatoren $a_{\alpha}(t)$, $a_{\beta}^{\dagger}(t')$ ist erklärt durch

$$\begin{aligned} T \{ a_{\alpha}(t) a_{\beta}^{\dagger}(t') \} &:= \theta(t-t') a_{\alpha}(t) a_{\beta}^{\dagger}(t') - \\ &- \theta(t'-t) a_{\beta}^{\dagger}(t') a_{\alpha}(t) \end{aligned} \quad (A.2)$$

mit

$$\theta(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{für } \tau > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (A.3)$$

Wenn der Hamiltonoperator H nicht explizit zeitabhängig ist, hängt die Green-Funktion $G_{\alpha\beta}(t, t')$ nur von der Zeitdifferenz $(t-t')$ ab und besitzt die Fouriertransformierte

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(\omega) &:= \int dt (t-t') \exp(i\omega(t-t')) G_{\alpha\beta}(t, t') = \\ &= \langle 0 | a_{\alpha}(\omega - H + E_0 + i0)^{-1} a_{\beta}^{\dagger} | 0 \rangle - \langle 0 | a_{\beta}^{\dagger}(\omega + H - E_0 - i0)^{-1} a_{\alpha} | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (A.4a)$$

In Schalenmodell-Näherung wird die Einteilchen-Green-Funktion in den Indizes diagonal, und es folgt

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(\omega) &= z_{\alpha} \delta_{\alpha\beta} \left\{ \frac{(1-n_{\alpha})}{\omega - \epsilon_{\alpha} + i0} + \frac{n_{\alpha}}{\omega + \epsilon_{\alpha} - i0} \right\} \\ n_{\alpha} &:= \begin{cases} 0 & \text{für Teilchen} \\ 1 & \text{für Löcher} \end{cases} \quad \begin{aligned} \epsilon_{\alpha} &:= E_0 - E_{\alpha} \\ z_{\alpha} &:= \langle \alpha | a_{\alpha} | 0 \rangle \end{aligned} \end{aligned} \quad (A.4b)$$

Der Größe z_{α} kommt die Bedeutung eines "spektroskopischen Faktors" zu: es wird der wirkliche Zustand α mit einem Schalenmodell-Zustand verglichen.

Ganz entsprechend kann man auch nichtdiagonale Green-Funktionen definieren:

$$G_{\alpha\beta}^{\nu\mu}(t,t') := (-i)\langle v | T\{a_{\alpha}(t)a_{\beta}^{\dagger}(t')\} | \mu \rangle . \quad (A.5)$$

Die Zustände μ, ν sind dabei Eigenzustände des Hamiltonoperators mit den Eigenwerten E_{μ}, E_{ν} . Wie man leicht sieht, hängt diese Green-Funktion für $\mu \neq \nu$ von t und t' also nicht nur von der Zeitdifferenz $(t-t')$ ab. Auch in diesem Falle gibt es eine Fouriertransformierte:

$$G_{\alpha\beta}^{\nu\mu}(\omega, \omega') := \int dt \, dt' \exp(i\omega t - i\omega' t') G_{\alpha\beta}^{\nu\mu}(t, t') \quad (A.6)$$

Zur Auswertung der Integrale führt man die neuen Variablen

$$\begin{aligned} \epsilon &:= (\omega + \omega')/2 & \hat{\omega} &:= \omega - \omega' & \epsilon_{\nu, \mu} &:= E_0 - E_{\nu, \mu} \\ \epsilon_{\nu\mu} &:= (\epsilon_{\nu} + \epsilon_{\mu})/2 & \hat{\omega}_{\nu\mu} &:= \epsilon_{\nu} - \epsilon_{\mu} \\ \tau &:= t - t' & \hat{t} &:= (t + t')/2 \end{aligned} \quad (A.7)$$

ein und erhält

$$G_{\alpha\beta}^{\nu\mu}(\omega, \omega') = 2\pi\delta(\hat{\omega} - \hat{\omega}_{\nu\mu}) G_{\alpha\beta}^{\nu\mu}(\epsilon) \quad (A.8)$$

mit

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^{\nu\mu}(\epsilon) &= \langle v | a_{\alpha}(\epsilon - H + E_0 - \epsilon_{\nu\mu} + i0)^{-1} a_{\beta}^{\dagger} | \mu \rangle + \\ &+ \langle v | a_{\beta}^{\dagger}(\epsilon + H - E_0 + \epsilon_{\nu\mu} - i0)^{-1} a_{\alpha} | \mu \rangle . \end{aligned} \quad (A.9)$$

Für $\nu = \mu = 0$ geht Gl.(A.9) in Gl.(A.4a) über.

Eine Zweiteilchen-Green-Funktion ist definiert durch¹⁵⁾

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{\nu\mu}(t_{\alpha}, t_{\beta}; t_{\gamma}, t_{\delta}) &:= \\ &:= (-i)^2 \langle 0 | T\{a_{\alpha}(t_{\alpha})a_{\beta}(t_{\beta})a_{\delta}^{\dagger}(t_{\delta})a_{\gamma}^{\dagger}(t_{\gamma})\} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (A.10)$$

Der Zeitordnungsoperator T ordnet hierbei die Feldoperatoren so an, daß die Zeitargumente von links nach rechts abnehmen; für jede dazu notwendige Permutation gibt es einen Vorzeichenwechsel.

Eine solche Zweiteilchen-Green-Funktion kann man in Einteilchen-Green-Funktionen zerlegen, wenn man den Vertex Γ einführt:

$$\begin{aligned}
 G_{\alpha\beta,\gamma\delta}(t_\alpha, t_\beta; t_\gamma, t_\delta) &= G_{\alpha\gamma}(t_\alpha, t_\delta) G_{\beta\delta}(t_\beta, t_\delta) - \\
 -G_{\alpha\delta}(t_\alpha, t_\delta) G_{\beta\gamma}(t_\beta, t_\gamma) &+ i \cdot G_{\alpha\kappa}(t_\alpha, t_\kappa) G_{\beta\lambda}(t_\beta, t_\lambda) \times \\
 \times \Gamma_{\kappa\lambda, \rho\sigma}(t_\kappa, t_\lambda; t_\rho, t_\sigma) &G_{\rho\gamma}(t_\rho, t_\gamma) G_{\sigma\delta}(t_\sigma, t_\delta) .
 \end{aligned} \quad (A.11)$$

Wie man aus Gl.(A.10) leicht erkennt, sind für den Vertex Γ die folgenden Symmetrierelationen erfüllt:

$$\Gamma_{\kappa\lambda, \rho\sigma}(t_\kappa, t_\lambda; t_\rho, t_\sigma) = \begin{cases} -\Gamma_{\kappa\lambda, \sigma\rho}(t_\kappa, t_\lambda; t_\sigma, t_\rho) \\ -\Gamma_{\lambda\kappa, \rho\sigma}(t_\lambda, t_\kappa; t_\rho, t_\sigma) \end{cases} . \quad (A.12)$$

Diese Symmetrierelationen sind eine unmittelbare Folge des Pauliprinzipis. Definiert man die Fouriertransformierte der Zweiteilchen-Green-Funktion durch

$$\begin{aligned}
 G_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\epsilon_\alpha, \epsilon_\beta; \epsilon_\gamma, \epsilon_\delta) &:= \int dt_\alpha \dots dt_\delta \exp(i(\epsilon_\alpha t_\alpha + \epsilon_\beta t_\beta)) \times \\
 \times \exp(-i(\epsilon_\gamma t_\gamma + \epsilon_\delta t_\delta)) &G_{\alpha\beta,\gamma\delta}(t_\alpha, t_\beta; t_\gamma, t_\delta)
 \end{aligned} \quad (A.13)$$

und analog die des Vertex, so erhält man nach längerer Zwischenrechnung

$$\begin{aligned}
 G_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\epsilon_\alpha, \epsilon_\beta; \epsilon_\gamma, \epsilon_\delta) &= 2\pi\delta(\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta - \epsilon_\gamma - \epsilon_\delta) \times \\
 \times G_{\alpha\beta,\gamma\delta}((\epsilon_\alpha + \epsilon_\gamma)/2, (\epsilon_\beta + \epsilon_\delta)/2; &\epsilon_\alpha - \epsilon_\gamma)
 \end{aligned} \quad (A.14)$$

und eine analoge Gleichung für den Vertex. Bei der Herleitung dieser Gleichung verwandten wir die Identitäten

$$\begin{aligned}
 \epsilon_\alpha t_\alpha + \epsilon_\beta t_\beta - \epsilon_\gamma t_\gamma - \epsilon_\delta t_\delta &= \frac{\epsilon_\alpha + \epsilon_\gamma}{2} \tau_1 + \frac{\epsilon_\beta + \epsilon_\delta}{2} \tau_2 + \\
 + (\epsilon_\alpha - \epsilon_\gamma) \tau_3 &+ (\epsilon_\beta - \epsilon_\delta) \tau_4
 \end{aligned}$$

$$\text{mit} \quad (A.15)$$

$$\tau_1 := (t_\alpha - t_\gamma) \quad \tau_2 := (t_\beta - t_\delta)$$

$$\tau_3 := (t_\alpha + t_\gamma)/2 \quad \tau_4 := (t_\beta + t_\delta)/2$$

und ferner

$$(\epsilon_\alpha - \epsilon_\gamma) \tau_3 + (\epsilon_\beta - \epsilon_\delta) \tau_4 = (\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta - \epsilon_\gamma - \epsilon_\delta) \tau_3 + (\epsilon_\beta - \epsilon_\delta) (\tau_4 - \tau_3) \quad (A.15)$$

$$d\tau_3 d\tau_4 = d\tau_3 d(\tau_4 - \tau_3)$$

Benutzt man ferner die sich aus Gl.(A.8) ergebende Energieerhaltung für die Einteilchen-Green-Funktion, so erhält man

$$G_{\alpha\beta, \gamma\delta}(\epsilon, \epsilon'; \hat{\omega}) = 2\pi \{ \delta(\hat{\omega}) G_{\alpha\gamma}(\epsilon + \hat{\omega}/2) G_{\beta\delta}(\epsilon' - \hat{\omega}/2) - \\ - \delta(\epsilon - \epsilon') G_{\alpha\delta}(\epsilon + \hat{\omega}/2) G_{\beta\gamma}(\epsilon' - \hat{\omega}/2) \} + i \cdot G_{\alpha\kappa}(\epsilon + \hat{\omega}/2) \times \quad (A.16)$$

$$\times G_{\beta\lambda}(\epsilon' - \hat{\omega}/2) \Gamma_{\kappa\lambda, \rho\sigma}(\epsilon, \epsilon'; \hat{\omega}) G_{\rho\gamma}(\epsilon - \hat{\omega}/2) G_{\sigma\delta}(\epsilon' + \hat{\omega}/2) ,$$

wobei wir die Variablen

$$\epsilon := (\epsilon_\alpha + \epsilon_\gamma)/2 \quad \epsilon' := (\epsilon_\beta + \epsilon_\delta)/2 \quad (A.17)$$

$$\hat{\omega} := \epsilon_\alpha - \epsilon_\gamma$$

eingeführt haben. Die Herleitung der Gl.(27) schließlich gelingt unter Verwendung der Gl.(A.8) und der zu Gl.(A.14) analogen Gleichung für den Vertex.

Anhang B: Ableitung einiger Gleichungen mit Hilfe der Funktionalmethode¹⁹⁾

Wir definieren die Green-Funktion bei Vorhandensein eines äußeren skalaren Feldes Q durch^{†)}

$$G_{\alpha\beta} := (-i) \frac{\langle 0 | T \{ \hat{a}_\alpha \hat{a}_\beta^\dagger U \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ U \} | 0 \rangle} \quad (B.1)$$

mit

$$U := \exp(-iQ_{\alpha\beta} \hat{a}_\beta \hat{a}_\alpha^\dagger) . \quad (B.2)$$

Im Falle $Q \rightarrow 0$ ergibt sich genau die Definition aus Anhang A. Entsprechend zu (B.1) lassen sich auch höhere Green-Funktionen definieren.

Durch Variationsableitung nach dem äußeren Feld ergibt sich dann die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{\delta G_{\alpha\beta}}{\delta Q_{\gamma\delta}} &= (-i)^2 \frac{\langle 0 | T \{ \hat{a}_\alpha \hat{a}_\delta \hat{a}_\gamma^\dagger \hat{a}_\beta^\dagger U \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ U \} | 0 \rangle^2} - \\ &- (-i)^2 \frac{\langle 0 | T \{ \hat{a}_\alpha \hat{a}_\beta^\dagger U \} | 0 \rangle \langle 0 | T \{ \hat{a}_\delta \hat{a}_\gamma^\dagger U \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ U \} | 0 \rangle^2} = \\ &= G_{\alpha\delta, \beta\gamma} - G_{\alpha\beta} G_{\delta\gamma} =: R_{\alpha\delta, \beta\gamma} . \end{aligned} \quad (B.3)$$

Die durch Gl.(B.3) eingeführte Funktion R heißt lineare Antwortfunktion.

Unter Benutzung der Bewegungsgleichung für die Feldoperatoren

$$(S_{\alpha\beta} + V_{\alpha\delta, \beta\gamma} \hat{a}_\delta^\dagger \hat{a}_\gamma) \hat{a}_\beta = 0 , \quad (B.4)$$

wobei S der Schrödinger-Operator

^{†)} Um eine kompakte Schreibweise zu erhalten, wollen wir hier die Summenkonvention benutzen; die Zeitargumente denken wir uns dabei in die Indizes inkorporiert. Um eine Verwechslung der hier verwendeten Feldoperatoren in Heisenbergdarstellung mit denen in Schrödingerdarstellung auszuschließen, heben wir die ersteren durch " $\hat{}$ " hervor.

$$S_{\alpha\beta} := - \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t_\alpha} + \frac{\hbar^2 \nabla_\alpha^2}{2m_\alpha} \right) \delta_{\alpha\beta} \quad (B.5)$$

und V die (freie) Zweiteilchen-Wechselwirkung ist, erhält man die Identität

$$(S+Q)_{\alpha\kappa} G_{\kappa\beta} + i \cdot V_{\alpha\kappa, \lambda\delta} G_{\lambda\delta, \beta\kappa} = \delta_{\alpha\beta} . \quad (B.6)$$

Der Massenoperator Σ ist definiert durch

$$G_{\alpha\beta} =: (S+Q+\Sigma)^{-1}_{\alpha\beta} . \quad (B.7)$$

Durch Variationsableitung erhält man dann aus

$$G_{\alpha\kappa} (S+Q+\Sigma)_{\kappa\lambda} = \delta_{\alpha\lambda} \quad (B.8)$$

die Gleichung

$$\frac{\delta G_{\alpha\lambda}}{\delta Q_{\delta\beta}} (G^{-1})_{\lambda\kappa} + G_{\alpha\lambda} (\delta_{\lambda\delta} \delta_{\kappa\beta} + \frac{\delta \Sigma_{\lambda\kappa}}{\delta Q_{\delta\beta}}) = 0 . \quad (B.9)$$

Multipliziert man diese Gleichung von rechts mit $G_{\kappa\gamma}$ und summiert über κ , so folgt:

$$\frac{\delta G_{\alpha\gamma}}{\delta Q_{\delta\beta}} + G_{\alpha\delta} G_{\beta\gamma} + G_{\alpha\lambda} G_{\kappa\gamma} \frac{\delta \Sigma_{\lambda\kappa}}{\delta Q_{\delta\beta}} = 0 . \quad (B.10)$$

Ferner ist

$$\frac{\delta \Sigma_{\lambda\kappa}}{\delta Q_{\delta\beta}} = \frac{\delta \Sigma_{\lambda\kappa}}{\delta G_{\nu\mu}} \cdot \frac{\delta G_{\nu\mu}}{\delta Q_{\delta\beta}} =: -i \cdot F_{\lambda\mu, \kappa\nu} \frac{\delta G_{\nu\mu}}{\delta Q_{\delta\beta}} , \quad (B.11)$$

womit wir die effektive Kraft F eingeführt haben.

Damit folgt aus (B.10) wegen (B.3) eine Integralgleichung für die lineare Antwortfunktion:

$$R_{\alpha\beta, \gamma\delta} = -G_{\alpha\delta} G_{\beta\gamma} + i \cdot G_{\alpha\lambda} G_{\kappa\gamma} F_{\lambda\mu, \kappa\nu} R_{\nu\beta, \mu\delta} . \quad (B.12)$$

Mit

$$R_{\alpha\beta, \gamma\delta}^0 := -G_{\alpha\delta} G_{\beta\gamma} \quad (B.13)$$

folgt dann aus (B.12):

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta} = R_{\alpha\beta,\gamma\delta}^0 - i \cdot R_{\alpha\kappa,\gamma\lambda}^0 F_{\lambda\mu,\kappa\nu} R_{\nu\beta,\mu\delta} . \quad (B.14)$$

Dies ist Gl.(40). Nun kann man andererseits die Zweiteilchen-Green-Funktion mit Hilfe des Vertex Γ in Einteilchen-Green-Funktionen zerlegen:

$$G_{\alpha\beta,\gamma\delta} = G_{\alpha\gamma} G_{\beta\delta} - G_{\alpha\delta} G_{\beta\gamma} + i \cdot G_{\alpha\lambda} G_{\beta\mu} \Gamma_{\lambda\mu,\kappa\nu} G_{\kappa\gamma} G_{\nu\delta} . \quad (B.15)$$

Für die lineare Antwortfunktion bedeutet das

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta} = R_{\alpha\beta,\gamma\delta}^0 + i \cdot R_{\alpha\kappa,\gamma\lambda}^0 \Gamma_{\lambda\mu,\kappa\nu} R_{\nu\beta,\mu\delta}^0 , \quad (B.16)$$

woraus dann mit (B.15) folgt:

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta} = F_{\alpha\beta,\gamma\delta} + i \cdot F_{\alpha\kappa,\gamma\lambda} R_{\lambda\mu,\kappa\nu}^0 \Gamma_{\nu\beta,\mu\delta} . \quad (B.17)$$

Die Kombination der Gln.(B.14) und (B.17) liefert schließlich die Gl.(33)

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta} = F_{\alpha\beta,\gamma\delta} + i \cdot F_{\alpha\kappa,\gamma\lambda} R_{\lambda\mu,\kappa\nu} F_{\nu\beta,\mu\delta} . \quad (B.18)$$

Man kann also den Vertex aus einer effektiven Kraft berechnen, wenn man die lineare Antwortfunktion kennt.

Anhang C: Theorie der Resonanzbreiten

Für die diskreten Teilchen- und Loch-Zustände lautet die Random-Phase-Gleichung

$$(\epsilon_\lambda + \epsilon_\beta - \epsilon_\alpha) \rho_{\alpha\beta}^\lambda = z_\alpha z_\beta (n_\beta - n_\alpha) F_{\alpha\gamma, \beta\delta} \rho_{\delta\gamma}^\lambda. \quad (C.1)$$

Berücksichtigt man noch die Teilchen-Zustände aus dem Kontinuum, so ergibt sich bei Vernachlässigung von Teilchen-Loch-Amplituden der Art $\rho_{\alpha k}^\lambda(+)$:

$$(\epsilon_\lambda + \delta\epsilon_\lambda + \epsilon_\beta - \epsilon_\alpha) \rho_{\alpha\beta}^\lambda = z_\alpha z_\beta (n_\beta - n_\alpha) \{ F_{\alpha\gamma, \beta\delta} \rho_{\delta\gamma}^\lambda + \sum_{k'} F_{\alpha\nu, \beta k'}(+)\rho_{k'(+)\nu}^\lambda \}. \quad (C.2)$$

Hierin bedeutet $\sum$, daß nur über die nichtresonanten Partialwellen summiert und integriert wird. Wegen (C.1) erhält man dann

$$\delta\epsilon_\lambda \rho_{\alpha\beta}^\lambda = z_\alpha z_\beta (n_\beta - n_\alpha) \sum_{k'} F_{\alpha\nu, \beta k'}(+)\rho_{k'(+)\nu}^\lambda. \quad (C.3)$$

Andererseits liefert Gl.(46) in erster Ordnung der Störungsrechnung

$$\begin{aligned} \rho_{k'(+)\nu}^\lambda &= \Lambda_{k'(+)\nu}(\epsilon_\lambda) F_{k'(+)\gamma, \nu\delta} \rho_{\delta\gamma}^\lambda = \\ &= z_\nu \left(\epsilon_\lambda + \epsilon_\nu - \frac{\hbar^2 k'^2}{2m'} + i0 \right)^{-1} \cdot F_{k'(+)\gamma, \nu\delta} \rho_{\delta\gamma}^\lambda. \end{aligned} \quad (C.4)$$

Setzt man dies in Gl.(C.3) ein, so folgt mit

$$\|\rho^\lambda\|^2 = \sum_{\alpha\beta} |\rho_{\alpha\beta}^\lambda|^2 \quad (C.5)$$

für die Energieverschiebung $\delta\epsilon_\lambda$ der Ausdruck

$$\delta\epsilon_\lambda = \frac{1}{\|\rho^\lambda\|^2} \sum_{k'} z_\alpha z_\beta z_\nu \frac{|F_{k'(+)\gamma, \nu\delta} \rho_{\delta\gamma}^\lambda|^2}{\epsilon_\lambda + \epsilon_\nu - \frac{\hbar^2 k'^2}{2m'} + i0} \quad (C.6)$$

Dies ist Gl.(51).

Die hier angeführte Vorschrift, daß bei der Summation und Integration über das Kontinuum die resonanten Partialwellen auszulassen sind, mag auf den ersten Blick willkürlich erscheinen; sie findet ihre Begründung in der Theorie von Unger und Balashov³⁵⁾.

Wenn man die Kontinuumswellenfunktionen nur im Kerninneren genau zu kennen braucht (was hier wegen der Struktur der Matricelemente zutrifft), kann man die Kontinuumswellenfunktion $\phi_{p(+), l j t_3}(\vec{r})$ in der Nähe einer Einteilchenresonanz (z.B. die $1d_{3/2}$ -Resonanz bei ¹⁶O) wie folgt approximieren:

$$\phi_{p(+), l j t_3}(\vec{r}) = \left(\frac{\gamma_{\text{res}}^{1/2\pi}}{(\epsilon_p - \epsilon_{\text{res}})^2 + \gamma_{\text{res}}^2/4} \right)^{1/2} \exp(i\zeta_{lj}^{t_3}) \times \quad (C.7)$$

$$\times \xi_{l j t_3}(\vec{r}) ,$$

wobei ϵ_{res} die Lage und γ_{res} die Breite der Einteilchenresonanz und

$$\int d\vec{r} |\xi_{l j t_3}(\vec{r})|^2 = 1 \quad (C.8)$$

ist. Eine Vorschrift zur Berechnung von ξ findet man in der Arbeit von Unger³⁵⁾. Wenn nun die Einteilchenresonanz sehr scharf ist, so folgt wegen

$$\frac{2i0}{x^2 + 0^2} = 2\pi i \delta(x) , \quad (C.9)$$

daß die gesamte resonante Partialwelle $\phi_{p(+), l j t_3}$ durch die Wellenfunktion ξ eines quasigebundenen Zustandes approximiert wird. Dies ist die Begründung dafür, daß wir die resonanten Partialwellen wie gebundene Zustände behandeln.

Anhang D: Berechnung des Matrixelementes

$$\langle \ell_{\alpha} j_{\alpha} \ell_{\beta} j_{\beta} J M | (U^{(\kappa)}(1) \cdot U^{(\kappa)}(2)) (V^{(\lambda)}(1) \cdot V^{(\lambda)}(2)) | \ell_{\gamma} j_{\gamma} \ell_{\delta} j_{\delta} J' M' \rangle ,$$

wobei die Tensoren U nur auf die Ortsvariablen und die Tensoren V nur auf die Spinvariablen wirken.

Zunächst geht man mit Hilfe der Umkopplungstransformation

$$| \ell_{\alpha} j_{\alpha} \ell_{\beta} j_{\beta} J M \rangle = \sum_{SL} \sqrt{(2S+1)(2L+1)(2j_{\alpha}+1)(2j_{\beta}+1)} \times \\ \times \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \ell_{\alpha} & j_{\alpha} \\ \frac{1}{2} & \ell_{\beta} & j_{\beta} \\ S & L & J \end{Bmatrix} | \ell_{\alpha} \ell_{\beta} S L J M \rangle \quad (D.1)$$

von der jj-Kopplung zur LS-Kopplung über. Dann entkoppelt man die Zustände $| \ell_{\alpha} \ell_{\beta} S L J M \rangle$ gemäß

$$| \ell_{\alpha} \ell_{\beta} S L J M \rangle = \sum_{S_3 L_3} \begin{pmatrix} S & L & J \\ S_3 & L_3 & M \end{pmatrix} | \ell_{\alpha} \ell_{\beta} L L_3 \rangle | \frac{1}{2} \frac{1}{2} S S_3 \rangle \quad (D.2)$$

und erhält

$$\langle \ell_{\alpha} j_{\alpha} \ell_{\beta} j_{\beta} J M | (U^{(\kappa)}(1) \cdot U^{(\kappa)}(2)) (V^{(\lambda)}(1) \cdot V^{(\lambda)}(2)) \times \\ \times | \ell_{\gamma} j_{\gamma} \ell_{\delta} j_{\delta} J' M' \rangle = \sum_{S L S' L' S_3 L_3 S'_3 L'_3} \sqrt{(2S+1)(2L+1)} \times \\ \times \sqrt{(2S'+1)(2L'+1)(2j_{\alpha}+1)(2j_{\beta}+1)(2j_{\gamma}+1)(2j_{\delta}+1)} \times \\ \times \begin{pmatrix} S & L & J \\ S_3 & L_3 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S' & L' & J' \\ S'_3 & L'_3 & M' \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \ell_{\alpha} & j_{\alpha} \\ \frac{1}{2} & \ell_{\beta} & j_{\beta} \\ S & L & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \ell_{\gamma} & j_{\gamma} \\ \frac{1}{2} & \ell_{\delta} & j_{\delta} \\ S' & L' & J' \end{Bmatrix} \times \\ \times \langle \ell_{\alpha} \ell_{\beta} L L_3 | U^{(\kappa)}(1) \cdot U^{(\kappa)}(2) | \ell_{\gamma} \ell_{\delta} L' L'_3 \rangle \times \\ \times \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} S S_3 | V^{(\lambda)}(1) \cdot V^{(\lambda)}(2) | \frac{1}{2} \frac{1}{2} S' S'_3 \rangle . \quad (D.3)$$

Die rechte Seite läßt sich nun mit Gl.(15.5) aus de Shalit-Talmi²⁵⁾ auswerten:

$$\langle \ell_{\alpha} j_{\alpha} \ell_{\beta} j_{\beta} J M | (U^{(\kappa)}(1) \cdot U^{(\kappa)}(2)) (V^{(\lambda)}(1) \cdot V^{(\lambda)}(2)) \times \\ \times | \ell_{\gamma} j_{\gamma} \ell_{\delta} j_{\delta} J' M' \rangle = \sum_{S L S_3 L_3} (2S+1)(2L+1) \sqrt{(2j_{\alpha}+1)} \times \quad (D.4)$$

$$\begin{aligned}
 & \times \sqrt{(2j_\beta+1)(2j_\gamma+1)(2j_\delta+1)} \begin{pmatrix} S & L & J \\ S_\beta & L_\beta & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & L & J' \\ S_\beta & L_\beta & M' \end{pmatrix} \times \\
 & \times \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & l_\alpha & j_\alpha \\ \frac{1}{2} & l_\beta & j_\beta \\ S & L & J \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & l_\gamma & j_\gamma \\ \frac{1}{2} & l_\delta & j_\delta \\ S & L & J' \end{matrix} \right\} (-1)^{l_\gamma+l_\beta+L} \left\{ \begin{matrix} l_\alpha & l_\beta & L \\ l_\delta & l_\gamma & \kappa \end{matrix} \right\} \times \\
 & \times \langle l_\alpha \| U^{(\kappa)} \| l_\gamma \rangle \langle l_\beta \| U^{(\kappa)} \| l_\delta \rangle \cdot (-1)^{S+1} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \lambda \end{matrix} \right\} \times \\
 & \times \langle \frac{1}{2} \| V^{(\lambda)} \| \frac{1}{2} \rangle^2 .
 \end{aligned} \tag{D.4}$$

Die Orthogonalitätsrelationen für die Clebsch-Gordan-Koeffizienten liefern dann:

$$\begin{aligned}
 & \langle l_\alpha j_\alpha l_\beta j_\beta J M | (U^{(\kappa)}(1) \cdot U^{(\kappa)}(2)) (V^{(\lambda)}(1) \cdot V^{(\lambda)}(2)) \times \\
 & \times | l_\gamma j_\gamma l_\delta j_\delta J' M' \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \sum_{SL} (-1)^{l_\gamma+l_\beta+L+S+1} \times \\
 & \times (2S+1)(2L+1) \sqrt{(2j_\alpha+1)(2j_\beta+1)(2j_\gamma+1)(2j_\delta+1)} \times \\
 & \times \left\{ \begin{matrix} l_\alpha & l_\beta & L \\ l_\delta & l_\gamma & \kappa \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \lambda \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & l_\alpha & j_\alpha \\ \frac{1}{2} & l_\beta & j_\beta \\ S & L & J \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & l_\gamma & j_\gamma \\ \frac{1}{2} & l_\delta & j_\delta \\ S & L & J \end{matrix} \right\} \times \\
 & \times \langle l_\alpha \| U^{(\kappa)} \| l_\gamma \rangle \langle l_\beta \| U^{(\kappa)} \| l_\delta \rangle \langle \frac{1}{2} \| V^{(\lambda)} \| \frac{1}{2} \rangle^2 .
 \end{aligned} \tag{D.5}$$

Spezialfall: $\lambda=0$ und $V^{(0)}=1$. In diesem Falle gibt es nur für $S=0,1$ Beiträge zum Matrixelement. Wegen

$$\left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{matrix} \right\} = (-1)^{S+1/2} \quad \langle \frac{1}{2} \| 1 \| \frac{1}{2} \rangle = \sqrt{2}$$

erhält man dann aus Gl.(D.5)

$$\begin{aligned}
 & \langle l_\alpha j_\alpha l_\beta j_\beta J M | U^{(\kappa)}(1) \cdot U^{(\kappa)}(2) | l_\gamma j_\gamma l_\delta j_\delta J' M' \rangle = \\
 & = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \sum_{SL} (-1)^{l_\gamma+l_\beta+L} (2S+1)(2L+1) \sqrt{(2j_\alpha+1)(2j_\beta+1)} \times \\
 & \times \sqrt{(2j_\gamma+1)(2j_\delta+1)} \left\{ \begin{matrix} l_\alpha & l_\beta & L \\ l_\delta & l_\gamma & \kappa \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & l_\alpha & j_\alpha \\ \frac{1}{2} & l_\beta & j_\beta \\ S & L & J \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & l_\gamma & j_\gamma \\ \frac{1}{2} & l_\delta & j_\delta \\ S & L & J \end{matrix} \right\} \times \\
 & \times \langle l_\alpha \| U^{(\kappa)} \| l_\gamma \rangle \langle l_\beta \| U^{(\kappa)} \| l_\delta \rangle .
 \end{aligned} \tag{D.6}$$

Anhang E: Umkopplungsformel für Clebsch-Gordan-Koeffizienten

Zwischen den 9j-Symbolen und den 3j-Symbolen besteht die Beziehung (de Shalit-Talmi²⁵), Gl.(14.42))

$$\begin{aligned} & \sum_{JM} (2J+1) \begin{pmatrix} J_{12} & J_{34} & J \\ M_{12} & M_{34} & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{13} & J_{24} & J \\ M_{13} & M_{24} & M \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{Bmatrix} = \\ & = \sum_{\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \Omega_4} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ -\Omega_1 & -\Omega_2 & M_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & J_{34} \\ \Omega_3 & \Omega_4 & M_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & J_{13} \\ -\Omega_1 & \Omega_3 & M_{13} \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} j_2 & j_4 & J_{24} \\ -\Omega_2 & \Omega_4 & M_{24} \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (E.1)$$

Setzt man nun voraus, daß die $j_1, \dots, j_4$ halbzahlig und die $J_{12}, J_{34}, J_{13}, J_{24}$ ganzzahlig sind, so erhält man aus (E.1) durch Übergang zu den Clebsch-Gordan-Koeffizienten:

$$\begin{aligned} & \sum_{JM} (-1)^{J_{12}-J_{34}+J_{13}-J_{24}} \sqrt{(2J_{12}+1)(2J_{34}+1)(2J_{13}+1)(2J_{24}+1)} \times \\ & \times \begin{pmatrix} J_{12} & J_{34} & J \\ M_{12} & M_{34} & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{13} & J_{24} & J \\ M_{13} & M_{24} & M \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{Bmatrix} = \\ & = \sum_{\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \Omega_4} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ -\Omega_1 & -\Omega_2 & -M_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & J_{34} \\ \Omega_3 & \Omega_4 & -M_{34} \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & J_{13} \\ -\Omega_1 & \Omega_3 & -M_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_4 & J_{24} \\ -\Omega_2 & \Omega_4 & -M_{24} \end{pmatrix} = \\ & = \sum_{\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \Omega_4} \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & J_{12} \\ \Omega_2 & \Omega_1 & M_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & J_{34} \\ \Omega_3 & \Omega_4 & M_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & J_{13} \\ -\Omega_1 & \Omega_3 & -M_{13} \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} j_2 & j_4 & J_{24} \\ -\Omega_2 & \Omega_4 & -M_{24} \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (E.2)$$

Wegen der Orthogonalitätsrelationen für die Clebsch-Gordan-Koeffizienten folgt hieraus:

$$\begin{aligned} & \sum_{JM} \sum_{J_{13} J_{24} M_{13} M_{24}} (-1)^{J_{12}-J_{34}+J_{13}-J_{24}} \sqrt{(2J_{12}+1)(2J_{34}+1)} \times \\ & \times \sqrt{(2J_{13}+1)(2J_{24}+1)} \begin{pmatrix} J_{12} & J_{34} & J \\ M_{12} & M_{34} & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{13} & J_{24} & J \\ M_{13} & M_{24} & M \end{pmatrix} \times \\ & \rightarrow \end{aligned} \quad (E.3)$$

$$\begin{aligned} & \times \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & J_{13} \\ -\Omega_1 & \Omega_3 & -M_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_4 & J_{24} \\ -\Omega_2 & \Omega_4 & -M_{24} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{Bmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & J_{12} \\ \Omega_2 & \Omega_1 & M_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & J_{34} \\ \Omega_3 & \Omega_4 & -M_{34} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (E.3)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\begin{pmatrix} J_{12} & J_{34} & 0 \\ M_{12} & M_{34} & 0 \end{pmatrix}$ und summiert über M_{12}, M_{34} , so erhält man

$$\begin{aligned} & \sum_{J_{13} J_{24} M_{13} M_{24}} (-1)^{J_{12} - J_{34} + J_{13} - J_{24}} \sqrt{(2J_{12}+1)(2J_{34}+1)} \times \\ & \times \sqrt{(2J_{13}+1)(2J_{24}+1)} \begin{pmatrix} J_{13} & J_{24} & 0 \\ M_{13} & M_{24} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & J_{13} \\ -\Omega_1 & \Omega_3 & -M_{13} \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} j_2 & j_4 & J_{24} \\ -\Omega_2 & \Omega_4 & -M_{24} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & 0 \end{Bmatrix} = \\ & = \sum_{M_{12}, M_{34}} \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & J_{12} \\ \Omega_2 & \Omega_1 & M_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & J_{34} \\ \Omega_3 & \Omega_4 & -M_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{12} & J_{34} & 0 \\ M_{12} & M_{34} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (E.4)$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & 0 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1 - \Omega_1}}{\sqrt{2j_1+1}} \delta_{j_1 j_2} \delta_{\Omega_1 (-\Omega_2)} \quad (E.5)$$

ergibt sich dann aus (E.4) nach leichter Zwischenrechnung

$$\begin{aligned} & \sum_{M_{12}} \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & J_{12} \\ \Omega_2 & \Omega_1 & M_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & J_{12} \\ \Omega_3 & \Omega_4 & M_{12} \end{pmatrix} = (2J_{12}+1) \cdot (-1)^{j_1 - \Omega_1} \times \\ & \times (-1)^{j_4 - \Omega_4} \sum_{J_{13} M_{13}} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & J_{13} \\ \Omega_1 & -\Omega_3 & M_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_2 & J_{13} \\ \Omega_4 & -\Omega_2 & M_{13} \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_4 & j_3 & J_{13} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (E.6)$$

wobei wir vermöge

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} := (-1)^{j_2 + j_3 + j_5 + j_6} \sqrt{(2j_3+1)(2j_6+1)} \times \\ & \times \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_5 & j_4 & j_3 \\ j_6 & j_6 & 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (E.7)$$

das $6j$ -Symbol eingeführt haben.

Die Umkopplungsformel (E.6) bewirkt insbesondere, daß die Drehimpulse von Teilchen und Loch im Eingangs- bzw. Ausgangskanal miteinander gekoppelt erscheinen.

Literaturverzeichnis

- 1) N.Bohr: Nature 137 (1936), 344
- 2) G.Breit und E.P.Wigner: Phys.Rev. 49 (1936), 519
- 3) P.L.Kapur und R.E.Peierls: Proc.Roy.Soc.(London)
A166 (1938), 277
- 4) E.P.Wigner und L.Eisenbud: Phys.Rev. 72 (1947), 29
- 5) J.Humblet und L.Rosenfeld: Nucl.Phys. 26 (1961), 529
- 6) H.Feshbach: Ann.Phys.(N.Y.) 5 (1958), 357
H.Feshbach: Ann.Phys.(N.Y.) 19 (1962), 287
H.Feshbach: Ann.Phys.(N.Y.) 43 (1967), 410
- 7) H.A.Weidenmüller: Nucl.Phys. 75 (1965), 189
H.A.Weidenmüller und K.Dietrich: Nucl.Phys. 83 (1966), 322
W.Glöckle, J.Hüfner und H.A.Weidenmüller: Nucl.Phys.
A90 (1967), 481
W.Ebenhöhh, W.Glöckle, J.Hüfner und H.A.Weidenmüller:
Z.Physik 202 (1967), 301
C.Mahaux und H.A.Weidenmüller: "Shell-Model Approach to
Nuclear Reactions" (North-Holland Publishing Co.,
Amsterdam, 1969)
- 8) U.Fano: Phys.Rev. 124 (1961), 1866
- 9) W.Brenig: Z.Physik 202 (1967), 340
W.Brenig: Proceedings of the Herceg Novi Summer School
on Nuclear Structure 1967, 341
- 10) K.Emrich: Nucl.Phys. A160 (1971), 1
- 11) F.Villars: "Fundamentals in Nuclear Theory" Hrsg.:
A.de Shalit und C.Villi (IAEA, Wien 1967), Kapitel 5
- 12) G.Wegmann: Z.Physik 226 (1969), 60
- 13) M.Weigel: Nucl.Phys. A137 (1969), 629
- 14) F.A.Zhivopistsev: Sov.J.Nucl.Phys. 1 (1965), 429
- 15) A.A.Abrikosov, L.P.Gorkov und I.E.Dzyaloshinski: "Quantum
Field Theoretical Methods in Statistical Physics"
(Pergamon Press, Oxford, 1965)
- 16) B.A.Lippmann und J.Schwinger: Phys.Rev. 79 (1950), 469
M.Gell-Mann und M.L.Goldberger: Phys.Rev. 91 (1953), 398

- 17) P.Roman: "Advanced Quantum Theory" (Addison-Wesley Publishing Co., Reading (Mass.), 1965), 308
- 18) A.S.Dawydow: "Theorie des Atomkerns" (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963), 314
- 19) L.P.Kadanoff und G.Baym: "Quantum Statistical Mechanics" (W.A.Benjamin, Inc., New York, 1962)
W.Brenig und H.Wagner: Z.Physik 173 (1963), 484
- 20) G.Baym und L.P.Kadanoff: Phys.Rev. 124 (1961), 287
- 21) A.B.Migdal: "Theory of Finite Fermi Systems and Applications to Atomic Nuclei" (Wiley-Interscience, New York, 1967), 117
- 22) A.B.Migdal: "Many-Body Description of Nuclear Structure and Nuclear Reactions" Hrsg.: C.Bloch (Academic Press, New York, 1965), 171
B.L.Birbrair und V.N.Guman: Sov.J.Nucl.Phys. 1 (1965), 693
B.L.Birbrair, G.M.Bukat und V.N.Guman: Sov.J.Nucl.Phys. 4 (1967), 337
- 23) K.Emrich, W.Theis und E.Werner: Z.Physik 215 (1968), 335
E.Werner und D.Zawischa: "On Effective Interactions in Nuclei", unveröffentlicher Vorabdruck
- 24) A.Bohr und B.R.Mottelson: "Nuclear Structure" (W.A.Benjamin, Inc., New York, 1961) Vol.1, 36
- 25) A.de Shalit und I.Talmi: "Nuclear Shell Theory" (Academic Press, New York, 1963)
- 26) G.E.Brown: "Unified Theory of Nuclear Models" (North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1964), 27
- 27) D.J.Thouless: Nucl.Phys. 22 (1961), 78
- 28) M.L.Goldberger und K.M.Watson: "Collision Theory" (Wiley & Sons, Inc., New York, 1964), Kapitel 7
- 29) N.F.Mott und H.M.Massey: "The Theory of Atomic Collisions" 3.Auflage (Clarendon Press, Oxford, 1965), Kapitel X, §2
- 30) N.Austern: "Direct Nuclear Reaction Theories" (Wiley-Interscience, New York, 1970), 84
- 31) J.Speth: private Mitteilung
- 32) G.Eder: "Kernkräfte" (Verlag G.Braun, Karlsruhe, 1965), 71
- 33) H.A.Mavromatis, W.Markiewicz und A.M.Green: Nucl.Phys. A90 (1967), 101

- 34) H.P.Jolly: Phys.Lett. 5 (1963), 289
J.da Providencia und C.M.Shakin: Nucl.Phys. A108 (1968), 609
- 35) V.V.Balashov, P.Doleshall, G.Ya.Korenman, V.L.Korotkikh
und V.N.Fetisov: Sov.J.Nucl.Phys. 2 (1966), 461
H.J.Unger: Nucl.Phys. A104 (1967), 564
M.Weigel: Z.Naturforsch. 25a (1970), 1562
- 36) P.J.Eberlein: J.Soc.Industr.Appl.Math. 10 (1962), 74
- 37) F.Ajzenberg-Selove und T.Lauritsen: Nucl.Phys. 11 (1959), 1
- 38) P.K.Haug: Z.Physik 238 (1970), 289
- 39) G.E.Brown und A.M.Green: Phys.Lett. 15 (1965), 168
L.Zamick: Phys.Lett. 19 (1965), 580
N.de Takacsy und S.Das Gupta: Nucl.Phys. A152 (1970), 657
- 40) M.A.Melkanoff, T.Sawada und J.Raynal: "Methods in
Computational Physics" Hrsg.: B.Alder (Academic
Press, New York, 1966), Vol.6, 14
- 41) F.Ajzenberg-Selove und T.Lauritsen: "Landolt-Börnstein:
Zahlenwerte und Funktionen aus Naturwissenschaft
und Technik". Neue Serie. Hrsg.: K.H.Hellwege
Gruppe I: Kernphysik und Kerntechnik. (Springer,
Berlin, 1961) Band 1, 1-54
- 42) J.S.Hanna: Dissertation Case Western Reserve University
(Technical Report No.C00-1573-35)
J.S.Hanna und M.A.Nagarajan: Nucl.Phys. A113 (1968), 412

Herrn Professor Dr. G. S ü ß m a n n danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und sein förderndes Interesse.

Herrn Dr. G. W e g m a n n und Herrn Dr. M. W e i g e l bin ich wegen vieler nützlicher Diskussionen und Hinweise zu Dank verpflichtet.

Die numerischen Rechnungen wurden auf dem Großrechner TR440 des Leibniz-Rechenzentrums in München und auf der Rechenanlage IBM 360/91 des Instituts für Plasmaphysik in Garching durchgeführt. Beiden Institutionen sei an dieser Stelle für die Benutzung der Rechenanlagen gedankt.

Danken möchte ich insbesondere dem Bundesministerium für Bildung und Wissenschaft, das durch die Bereitstellung von Sachmitteln die Benutzung der Rechenanlage IBM 360/91 ermöglichte.

Lebenslauf

Ich wurde am 17.10.1943 als Sohn des Assessors Heinrich Vogeler und dessen Ehefrau, Liselotte Vogeler, geb. Schneider, in Wiesbaden geboren. Von 1950 bis 1954 besuchte ich die Volksschule in Warburg/Westfalen und Frankfurt am Main und anschließend das Heinrich-von-Gagern-Gymnasium, Altsprachliches Gymnasium, in Frankfurt am Main, wo ich am 12.2.1963 die Reifeprüfung bestand. Mit dem Sommersemester 1963 begann ich an der Johann-Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt am Main mit dem Studium der Physik, wo ich am 13.5.1965 die Diplomvorprüfung bestand. Im Oktober 1966 begann ich mit der Diplomarbeit bei Herrn Prof.Dr.G.Süßmann. Durch ein Stipendium des italienischen Gesundheitsministeriums kam ich 1967 an das Istituto Superiore di Sanità in Rom, wo ich vom März bis Dezember 1967 im Laboratorium für Physik arbeitete. Nach meiner Rückkehr nach Frankfurt am Main führte ich meine Diplomarbeit zu Ende und bestand am 12.12.1968 die Diplomhauptprüfung für Physiker. Im April 1969 begann ich bei Herrn Prof.Dr.G.Süßmann in München mit der Dissertation.



